# Euclides

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

48e jaargang
1972/1973
no 9
mei

Wolters-Noordhoff

# EUCLIDES



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

**Wiskundewerkgroep van de W.V.O.**

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 20,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

# Meetkunde met vectoren VIII[1]

**(metrische driedimensionale meetkunde)**

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

We hebben de affiene vectormeetkunde verruimd door invoering van een inprodukt. Zo we zagen, is het nu mogelijk een definitie te geven van de lengte van een lijnstuk en van de grootte van een hoek. Van de affiene meetkunde zijn we dus overgestapt naar de metrische meetkunde. Het wordt ons nu mogelijk een grotere groep meetkundige begrippen te vertalen in vectoriële taal. Hoewel dit met didactiek weinig te maken heeft, is het toch misschien voor verschillende lezers plezierig, als ik een kort overzicht geef over de weg, die men bij deze vertaling kan volgen. Of anders gezegd: als ik een opsomming geef van de definities van de meetkundige termen in de vectortaal. Ik zou het te vertalen begrippengebied in drie delen willen verdelen:

*a.* orthogonaliteit;
*b.* hoekgrootten;
*c.* lengten en afstanden.

Voordat we dit programma kunnen uitvoeren, is het noodzakelijk te beschikken over een geschikt rekenapparaat. In de affiene meetkunde gingen we uit van een willekeurige basis en hadden we geen mogelijkheid onder alle mogelijke bases er één te kiezen, die zich op enigerlei wijze van de andere onderscheidt. In de metrische meetkunde daarentegen is het wel mogelijk de basis zo te kiezen, dat zijn speciale kwaliteiten vereenvoudiging van het rekenwerk mogelijk maken. We kiezen de basis orthonormaal, d.w.z. we kiezen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ zo, dat

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1,\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1,$$
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

T.o.v. een dergelijke basis geldt voor het inprodukt :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\cdot(w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

[1] De voorgaande artikelen vindt men in Euclides, 48-1 t/m 7 (de eerste zeven nummers van deze jaargang).

(als gevolg van de distributieve eigenschap; A11).
Deze eenvoudige formule voor het inprodukt is voor ons van onschatbare waarde. (Denkt u zich maar eens in, hoe ingewikkeld alle berekeningen zouden worden, als we de basis willekeurig kozen en in alle uitwerkingen dus $e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, \ldots, e_3 \cdot e_3$ zouden moeten meeslepen.)
Na deze voorbereiding gaan we met het vertalen beginnen.

Orthogonaliteit
Definitie. $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \overset{df}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$
Definitie. Twee lijnen staan loodrecht op elkaar, als hun richtingsvectoren loodrecht op elkaar staan.
Voordat we verder gaan, bewijzen we de volgende stelling:
Stelling. Als een vector loodrecht staat op twee onafhankelijke vectoren van een vectorvlak, dan staat hij loodrecht op elke vector uit het vlak.
Het bewijs is heel simpel. Het berust op de volgende implicatie:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \,\Delta\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \Rightarrow \forall \lambda, \mu \;: \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = 0$$

Een verrassend eenvoudig bewijs voor deze deductief-stereometrisch zo moeizaam aan te tonen stelling.
We kunnen nu de serie definities voortzetten met
Definitie. Een lijn staat loodrecht op een vlak, als hij loodrecht staat op alle lijnen in dat vlak.
Hoe vinden we zo'n loodlijn op een gegeven vlak? We stellen liever eerst een andere vraag.

Gegeven. Een vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{v} \neq \mathbf{0})$

Gevraagd. De verzameling van de vectoren, die loodrecht op v staan.
Oplossing. De opgave is meteen een welkome aanleiding nog eens een afleiding van de vergelijking van een puntverzameling te geven.
Mijn principe getrouw doe ik het als volgt:

$$\mathbf{p} \text{ voldoet } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p} \text{ ligt in } a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

Hieruit volgt:

het enige vectorvlak loodrecht op $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ is $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$;

de enige loodlijn door $O$ op $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ is $\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Omdat alle loodlijnen op een vlak evenwijdig zijn, kunnen we nu de slotdefinitie geven:
Definitie. Twee vlakken staan loodrecht op elkaar, als hun normalen loodrecht op elkaar staan.
De verdere stellingen over orthogonaliteit, die in de deductieve stereometrie soms voor de leerlingen vrij moeilijke bewijzen vereisten, kunnen nu zonder enige moeite afgeleid worden (voorzover daar behoefte aan bestaat).

Hoeken
Over hoeken zijn we gauw uitgepraat. Ik herhaal nog even de definitie van de hoek van twee vectoren.

Definitie. $\cos \angle (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}$ $(\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0})$

Uitgaande hiervan definiëren we de hoek van twee lijnen.

Definitie. Zijn v en w richtingsvectoren van resp. de lijnen $l$ en $m$, dan is

$$\cos \angle (l, m) = \left| \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|} \right|$$

De definitie is zo gekozen, dat de hoek van twee lijnen niet groter dan 90° is.

Definitie. Als $n$ een normaal van vlak $V$ is, dan is

$$\angle (l, V) = 90^\circ - \angle (l, n)$$

Definitie. Als $n$ en $m$ normalen van resp. $V$ en $W$ zijn, dan is

$$\angle (V, W) = \angle (n, m)$$

Dat is alles.

Afstanden
Allereerst definiëren we de afstand van twee punten.

Definitie. $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})}$

Om de afstand van een punt en een vlak en de afstand van twee kruisende lijnen te vinden, kan men uitgaan van de algemene afstandsdefinitie van twee puntverzamelingen $V_1$ en $V_2$:

$$d(V_1, V_2) = \min d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \text{ waarin } \mathbf{p}_1 \in V_1 \wedge \mathbf{p}_2 \in V_2.$$

Ik heb het niet gedaan. Ik heb afstand gedefinieerd als 'loodrechte afstand'. Ik heb de afstand dus gevonden door middel van een normaal van het vlak resp. een lijn, die loodrecht op de beide kruisende lijnen staat. In het kort wil ik de methode weergeven.

Afstand van een punt **p** en een vlak $V$. De vergelijking van $V$ is

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4$$

De normaal $n$ door **0** op $V$ is

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Kies nu een willekeurig punt $\mathbf{q} \in V$. De afstand van **p** en $V$ is dan gelijk aan de afstand van de projecties van **p** en **q** op $n$.
Deze afstand krijgt men als volgt. Neem het inwendig produkt van de vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ en de vector $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en deel dit door de lengte van $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Van deze uitkomst moeten we dan nog de absolute waarde nemen.
We krijgen zo:

$$d(\mathbf{p}, V) = \left| \frac{a_1(p_1 - q_1) + a_2(p_2 - q_2) + a_3(p_3 - q_3)}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^3)}} \right|$$

Nu geldt $\mathbf{q} \in V$ en dus is

$$a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 = a_4$$

Zodat we tenslotte vinden

$$d(\mathbf{p}, V) = \left| \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 - a_4}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}} \right|$$

Ik heb me in het voorgaande tot de metrische ruimtemeetkunde beperkt. De leerlingen geeft men de afleiding natuurlijk in twee dimensies. Het probleem is dan veel overzichtelijker. Ze kunnen zelf met enige moeite dan de overgang van twee naar drie dimensies wel tot stand brengen.
Al met al vind ik dit nog steeds de vervelendste afleiding, die in de cursus voorkomt. Misschien bedenkt u iets, wat meer naar uw smaak is.
Over de afstand van een vlak en een daaraan evenwijdige lijn en van twee evenwijdige vlakken behoef ik dunkt me niets meer te zeggen. Dit probleem is direct tot het voorgaande terug te brengen.
Blijft over de afstand van twee kruisende lijnen. B.v. de afstand van de lijnen $l$ en $m$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Onze eerste taak is hier een lijn te vinden door **0** die loodrecht op deze twee lijnen staat. Dus een lijn

$$x = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

met de eigenschap

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

We moeten de verhoudingen van $a_1$, $a_2$, $a_3$ dus oplossen uit

$$\begin{aligned} -1a_1 + 3a_2 + 4a_3 &= 0 \\ 3a_1 - 1a_2 + 5a_3 &= 0 \end{aligned}$$

We hebben vroeger gezien, dat we dan vinden

$$a_1 : a_2 : a_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Nu nemen we weer $\mathbf{p} \in l$ en $\mathbf{q} \in m$ en gaan verder op dezelfde manier tewerk als bij het bepalen van de afstand van een punt en een vlak.
In de zojuist gevonden determinanten herkent men de kentallen van het uitwendig produkt van de vectoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Het uitwendig produkt staat niet op het programma. Wie er de voorkeur aan geeft een uitwendig produkt in te voeren (zoals Westerman doet), staat dit natuurlijk vrij. Verplicht is het niet en het mag dus op het examen ook niet geëist worden.
Tot slot van de serie afstanden moeten we nog vermelden de afstand van een punt **p** en een lijn $l$ (in de ruimte). Hier is weinig aardigheid aan te beleven. Breng door het punt **p** een vlak aan loodrecht op $l$ en vind het snijpunt **q** van dit vlak met $l$. De gevraagde afstand is dan d (**p**, **q**).
Op dezelfde manier behandelt men de afstand van twee evenwijdige lijnen.
U ziet, de afstanden zijn niet het meest aantrekkelijke deel van het programma. Toch zou ik ze niet graag missen, want dit zou een te grote verarming betekenen, ten minste zo lang het vak meetkunde met vectoren heet en het dus gaat om een vectoriële behandeling van de meetkunde. Gelukkig is er een interessanter sluitstuk, namelijk de bol.

De bol
Definitie. De verzameling van de punten met afstand $r$ tot punt **p** heet bol met middelpunt **p** en straal $r$ ($r > 0$).

De vergelijking van een bol vinden we op de bekende manier.

$$\begin{aligned} \text{q ligt op de bol} &\Leftrightarrow \mathrm{d}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = r \Leftrightarrow (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{q} \text{ ligt op } (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 = r^2 \end{aligned}$$

De vergelijking van de bol met middelpunt **p** en straal $r$ is dus

$$(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 = r^2$$

Het volgende probleem leert ons weer iets nieuws.
Gevraagd wordt de doorsnede te vinden van een bol met een vlak. Gegeven zijn dus een bol en een vlak en gevraagd wordt hun doorsnede. We maken hier kennis met een methode, die voor onze leerlingen van groot nut kan zijn, als zij een stelling moeten afleiden. Kies dan het coördinatenstelsel zo gemakkelijk mogelijk. Dat geeft vaak enorme besparingen in het rekenwerk.[1] Hoe zullen we het hier kiezen?
Voor het vlak $x_3 = 0$ kiezen we het gegeven vlak. De positieve $x_3$-as kiezen we door het middelpunt van de bol. Ons probleem wordt dan: vind de doorsnede van

$$x_3 = 0 \text{ en } x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - d)^2 = r^2$$

waarin $d$ de afstand van het middelpunt van de bol tot het gegeven vlak is. Nu is

$$\left.\begin{aligned} &x_3 = 0 \\ &x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - d)^2 = r^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &x_3 = 0 \\ &x_1^2 + x_2^2 = r^2 - d^2 \end{aligned}\right.$$

Hieruit volgt

de doorsnede is een cirkel met positieve straal, als $d < r$
de doorsnede is een punt, als $d = r$
de doorsnede is leeg, als $d > r$.

In het middelste geval zeggen we, dat het vlak de bol raakt, en wel in het punt **0**.
Waarmee we meteen gevonden hebben:

$$\text{vlak } V \text{ raakt bol } \mathbf{m} \text{ in } \mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{p} \in V \wedge V \perp \text{ de lijn door } \mathbf{m} \text{ en } \mathbf{p}.$$

Anders geformuleerd

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in V &\Leftrightarrow (\mathbf{m} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (m_1 - p_1)(x_1 - p_1) + (m_2 - p_2)(x_2 - p_2) + \\ &\quad\ (m_3 - p_3)(x_3 - p_3) = 0 \end{aligned}$$

Hiermee hebben we de vergelijking van een raakvlak aan de bol gevonden.
Nu laten we het natuurlijk aan onze leerlingen over de doorsnede van twee bollen te vinden. Ze zullen er wel moeite mee hebben. Dan is het weer onze beurt ze te

[1] In de klas zal deze methode al eerder met vrucht toegepast kunnen worden.

vertellen, hoe het plezierig gaat. Kies de oorsprong in het middelpunt van een van de bollen en kies de positieve $x_3$-as zo, dat hij ook door het andere middelpunt gaat. Ons probleem is dan de doorsnede te vinden van

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - d)^2 &= r_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= r_2^2 \end{aligned}$$

waarin $d$ de afstand van de middelpunten is. Dit stelsel vergelijkingen is gelijkwaardig met

$$\begin{aligned} -2x_3d + d^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= r_2^2 \end{aligned}$$

De gevraagde doorsnede is dus de doorsnede van een van de bollen met een vlak loodrecht op de centraal.

Ook deze rekenmethode is voor de leerlingen de eerste keer vreemd. Je begint met de doorsnede van twee bollen. Vertaling in algebrataal geeft twee tweedegraads vergelijkingen. Algebraïsch rekenen geeft gelijkwaardigheid met een eerste- en een tweedegraads vergelijking. Terugvertalen geeft de doorsnede van een bol en een vlak.

Dit artikeltje heeft meer gehad van een compendium uit een leerboek dan van didactische beschouwing over vectormeetkunde. Ik dacht, dat sommige collega's het plezierig zouden vinden een kort overzicht over de samenhangen in de metrische meetkunde te lezen, ingesteld op gebruik in de klas. Volgende keer ga ik weer terug naar de klassepraktijk.

**Paginering aprilnummer**

De nummering van de bladzijden in het aprilnummer is tot mijn spijt onjuist. I.p.v. 241 t/m 286 zouden 281 t/m 326 als nummers gebruikt moeten zijn. Voor eventueel ongerief bied ik gaarne verontschuldigingen aan.

AMK

# Experiment met het eilandenprobleem

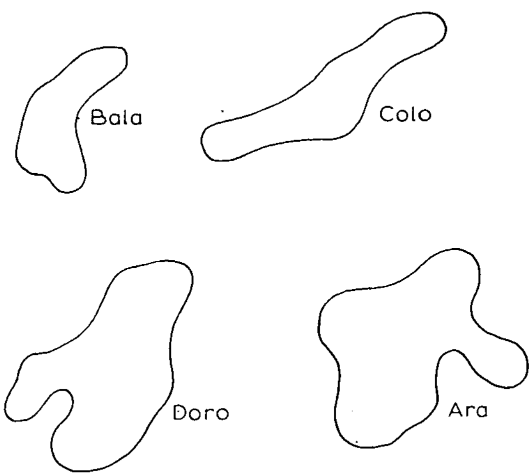
C. van SCHAGEN

Leusden

*Het centrale probleem van de didactiek is de vraag: wat mag ik van de leerlingen eisen en wat niet. Dit komt neer op de vraag: welke ontwikkelings-niveau's zijn er, en hoe zijn ze te kenmerken. Een manier om langs experimentele weg hier iets over te weten te komen is met behulp van de eilandentest. Men kan blijkbaar op zeer verschillende manieren ergens verklaringen van geven.*

Het idee komt uit The Math. Teacher, meen ik, van enkele jaren geleden. Met een groepje van 15 leerlingen van een Ie klas heb ik het een keer uitgevoerd. Uit de herinnering vertel ik hier iets over, zodat dit geen vertaling is van het amerikaanse artikel.

Eerst de tekst van de test, zoals ik die aan de groep heb voorgelegd:
Ergens in de Stille Oceaan ligt een groepje van vier eilanden. Ze heten Ara, Bala, Colo en Doro. Zoek ze maar niet op in je atlas, want ze zijn zo klein, dat ze de moeite van afbeelden niet waard zijn. Ze staan niet op de kaart.
Eeuwenlang hebben de bewoners van die eilanden elkaar opgezocht met zeil-



bootjes, maar ook daar staat de ontwikkeling niet stil, dus sinds kort kunnen ze elkaar ook bezoeken met een vliegtuig. Tenminste, er zijn een aantal vliegroutes mogelijk. In de dienstregeling staat, dat als een route mogelijk is, de omgekeerde route ook mogelijk is. Er worden dus retours verkocht.
Op het kaartje mag je aantekeningen maken, lijnen trekken enz.
Routes behoeven niet allemaal rechtstreeks te zijn. Het is best mogelijk, dat er tussenlandingen worden gemaakt op andere eilanden.

1e Mededeling: Het is mogelijk om van Bala naar Doro te vliegen.
2e Mededeling: Het is *niet* mogelijk om van Colo naar Ara te vliegen.

Vraag 1 *Is het mogelijk om van Bala naar Colo te vliegen?*
a) Ja b) Nee c) Het is uit de mededeling niet af te leiden
Vertel duidelijk hoe je aan het antwoord bent gekomen.

Je krijgt er nu nog een mededeling bij, de vorige blijven dus gelden.

3e Mededeling: Het is mogelijk om van Bala naar Colo te vliegen.

Vraag 2 *Is het mogelijk om van Doro naar Colo te vliegen?*
a) Ja b) Nee c) Het is uit de mededelingen niet af te leiden
Vertel duidelijk hoe je aan het antwoord bent gekomen.

Vraag 3 *Is het mogelijk om van Doro naar Ara te vliegen?*
a) Ja b) Nee c) Het is uit de mededelingen niet af te leiden
Vertel ook hier weer hoe je aan je antwoord bent gekomen.

De grap van de zaak is, dat het net lijkt of het een meerkeuze-toets is. En dat het dat niet is. Bij het beoordelen van de resultaten wordt helemaal niet gekeken naar het antwoord, maar naar de verklaring van de keuze van het antwoord. Het maakt daarbij helemaal geen verschil of een a), een b) of een c) werd gekozen.

Men kan veronderstellen, dat de manier van verklaren bepaald wordt door het ontwikkelingsniveau, en dat deze manier dus informatie geeft over welk niveau. Dat er ontwikkelings-niveau's zijn, is, dacht ik, wel een consensus, maar hoe ze eruit zien, daarover bestaat nog zeer veel verschil van mening. We behoeven ons daar niet veel van aan te trekken, want we kunnen proberen op introspectieve wijze een schema maken over welke soorten van verklaringen zouden kunnen optreden.
Maar eerst nog iets over de test zelf. Hij lijkt gemakkelijk. Ik had dan ook de neiging om de vragen wat moeilijker te maken. Het is maar goed dat ik dat niet gedaan heb, want het bleek zó al genoeg problemen op te leveren.

Niveau 0 Er wordt helemaal geen verklaring gegeven, of op een of andere manier wordt gemeld dat men het niet verklaren kan

Niveau 1 In de verklaring wordt niet naar de mededelingen verwezen. Ook wordt er zelf geen nieuwe informatie bijverzonnen.

a) Het antwoord wordt als verklaring herhaald

b) De verklaring verwijst naar lijnen in de tekening

c) Men fantaseert iets

Niveau 2 De verklaring bestaat uit de herhaling van een mededeling of verwijst er alleen maar naar

Niveau 3 Men heeft een model geconstrueerd. Dit model hoeft niet juist te zijn, als het maar gebruikt wordt

Niveau 4 Onvolledige redeneringen, waarin zowel de hypothese als minstens één mededeling voorkomt

Niveau 5 Volledige redenering

In het amerikaanse experiment heeft men de test voorgelegd aan een breed spectrum van categorieën proefpersonen. O.a. (in nederlandse terminologie) leerlingen van een basisschool, leerlingen van een school voor voortgezet onderwijs, studenten, technici, leraren. De juiste cijfers voor deze categorieën van de frekwenties van de niveau's kan ik niet meer achterhalen, maar over het algemeen was het resultaat teleurstellend. Niveau 5 werd slechts bij de leraren in een redelijk aantal malen gehaald. In mijn eigen experiment was de verdeling als volgt:

| Niveau | Percentage |
|---|---|
| 0 | 13 |
| 1 | 16 |
| 2 | 40 |
| 3 | 20 |
| 4 | 7 |
| 5 | 4 |

Ik som van elk niveau wat typische verklaringen op, zoals ze in mijn experiment voorkwamen (met handhaving van de taal- en spelfouten). Er zat nogal wat spreiding over de niveau's in de verklaringen van één proefpersoon. Maar de vragen waren ook van zeer verschillende moeilijkheidsgraad. Vraag 2 was het gemakkelijkst. De niveau's 4 en 5 werden dan ook alleen maar bij deze vraag gehaald.

Niveau 0: Daar staat niets over. Ik snap er niks van. Ik gok maar.

Niveau 1: Ik kan een diagonaal trekken. Ja, dat moet wel kunnen.

Niveau 2: Nee, omdat er in de mededelingen niet over staat. Er staat alleen maar dat men van Bala naar Doro kan vliegen.

Niveau 3: Je kunt wel van Bala wegvliegen, maar je kunt niet van Colo naar Ara, misschien is er geen vliegveld op Colo. Ja, want Colo heeft een vliegveld en Doro ook.

Niveau 4: Ja, want je vliegt met een tussenlanding op Bala.

Niveau 5: Ja, omdat je van Bala naar Colo kunt vliegen en van Bala naar Doro moet je ook van Doro naar Colo kunnen vliegen. Ja, want je kan bij de eerste

mededeling van Doro naar Bala vliegen en bij de derde mededeling kan je door naar Colo.
Een verklaring op niveau 5 van vraag 3 zou kunnen luiden:
Nee, want een vlucht tussen Doro en Ara zou een route tussen Colo en Ara mogelijk maken wegens het antwoord op vraag 2. Dit is in strijd met de 2de mededeling.
Het is natuurlijk mogelijk voor de niveau's 2, 3 en 4 nog wat onderverdelingen aan te brengen. Dit eist echter, hetzij een experiment van een veel grotere omvang, hetzij een theoretische analyse, hetzij een combinatie van beide.

theometrie I

theologie
is een soort
projectieve meetkunde

of je nu een lijn trekt
en zegt dat is oneindig
of je tekent een kruis
en je zegt dat is god
dat maakt weinig verschil

het is allebei
een openbaring

j. roelofsen

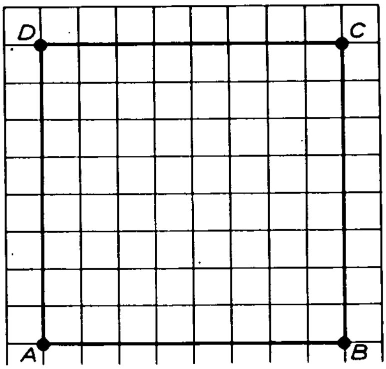
# Enkele indrukken van Exeter

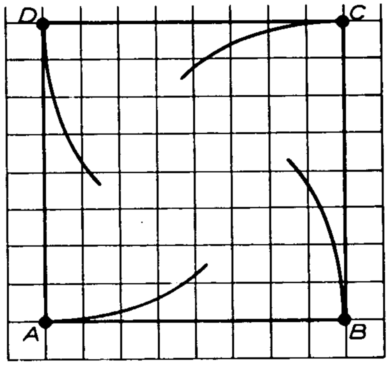
Het hier volgend verslag van enkele voordrachten en besprekingen tijdens het ICME-congres te Exeter (29 augustus-2 september '72) is tot stand gekomen door de samenwerking van de heren W.A. van Eek, Dr. P.M. van Hiele en H.N. Schuring. Het is gemaakt naar aantekeningen tijdens de besprekingen die later werden uitgewerkt. We moeten volstaan met het weergeven van slechts een deel van de door ons bijgewoonde voordrachten en besprekingen, omdat veel van wat besproken werd een te speciaal karakter had.

Groep 3 (zitting 6)

Daniel Pedoe: *Thinking geometrically – the reestablishment of geometry as a major discipline.*

De spreker bepleit een meetkundige aanpak van differentiaalvergelijkingen. Als voorbeeld geeft hij het volgende probleem:

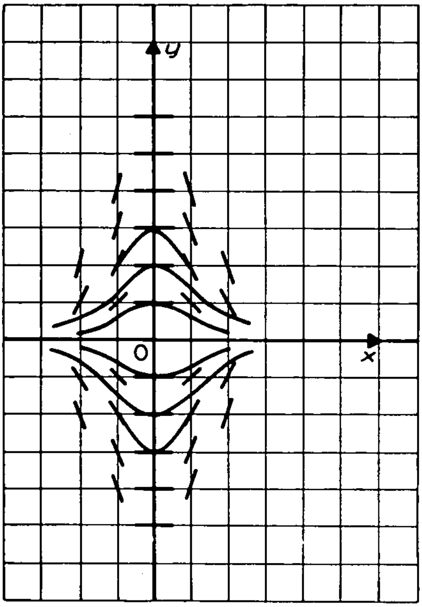



Op de vier hoekpunten van een vierkant zitten vier hongerige kanibalistische kevers. Kever $A$ wil Kever $B$ opeten, Kever $B$ wil Kever $C$ opeten, Kever $C$ wil Kever $D$ opeten, Kever $D$ wil Kever $A$ opeten.
Zij lopen elk in de richting van hun prooi met gelijke snelheden. Men vraagt de baankrommen te bepalen.
Noemt men de zijde van het vierkant $a$, dan is de differentiaalvergelijking die bij Kever $A$ behoort:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{a - x - y}$$

De oplossing kan grafisch plaatsvinden of met behulp van tabellen.

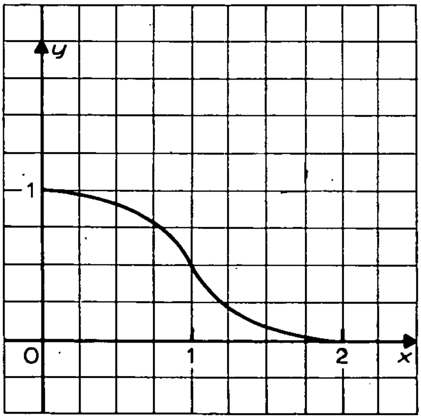



Interessant is ook het lijnelementenveld dat past bij de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -xy.$$

De oplossingen hangen direkt samen met de normale verdeling in de statistiek.

Aanbevolen wordt: Integratie met behulp van een computer, het werken met grafieken. Ook het begrip gradiënt is de moeite waard om te behandelen. Het integreren van differentiaalvergelijkingen is van veel minder betekenis.
Men werkt bij voorkeur met tabellen en computers.




Een interessant voorbeeld is de integraal:

$$\int_0^{10} \frac{dx}{1 + x^6}$$

Als men een grafiek maakt kan men direkt zien, dat er ongeveer 1 uitkomt.

Als tweede spreker op deze zitting kwam Prof. Révuz. Hij wees erop, dat de differentiaalvergelijkingen het belangrijkste onderwerp van de infinitesimaalrekening vormen.
Wat men in de praktijk tegenkomt zijn juist de differentiaalvergelijkingen. Belangrijke voorbeelden zijn: de differentiaalvergelijkingen die tot harmonische trillingen voeren, de groei van de bevolking en de hangkrommen (kettinglijn). Bij het laatste voorbeeld is het misschien nuttig te bedenken, dat men dikwijls ook te maken heeft met een differentiaalvergelijking, bijvoorbeeld als het een hangbrug betreft.

Men heeft dan weer een prachtig voorbeeld van het gebruik van matrices in de analyse.
Het belangrijkste van de differentiaalvergelijkingen is de vraag, hoe men tot zulke differentiaalvergelijkingen komt. Een benaderde oplossing met behulp van raaklijnen is belangrijk en zeer leerzaam. In de praktijk leert men, hoe belangrijk het is rekening te houden met de randwaarden.

Groep 5 (zitting 4)

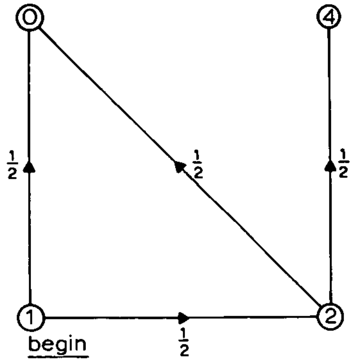
Arthur Engel: *Course on probability for seventh graders*

In deze werkgroep hebben we o.a. kennis kunnen maken met het werk van C.S.M.P. (The Comprehensive School Mathematics Program U.S.A.), op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.
C.S.M.P. heeft een wiskunde curriculum gemaakt voor het gehele pre-universitaire onderwijs, van kleuterschool tot het 12e leerjaar (± 18 jarige leerlingen). Al in de eerste klas van het basisonderwijs laat men de leerlingen kansen vergelijken door vragen zoals: ‘hebben kruis en munt bij het werpen van een muntstuk dezelfde kans? ’ Men kan ze leren dat sommige gebeurtenissen altijd optreden en andere nooit. De leerlingen voeren allerlei spelletjes uit met bekers en tolletjes zoals ondermeer beschreven is in Euclides jaargang 47 no. 7/8.
Aan het eind van het basisonderwijs (6e leerjaar) zijn de leerlingen vertrouwd met de volgende onderwerpen:

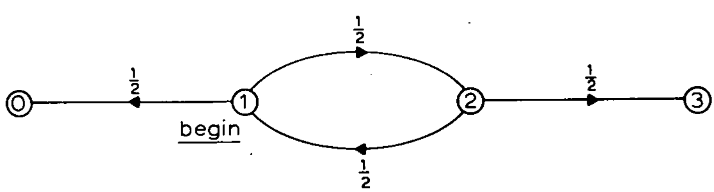
**a** Uitkomst en uitkomstenverzameling
**b** Gebeurtenis
**c** Kans op een gebeurtenis
**d** Verwachting
**e** Afhankelijkheid en onafhankelijkheid.

Als men boom-diagrammen, zoals beschreven in het bovengenoemde nummer van Euclides, gebruikt is het mogelijk met een minimum aan theorie niet-triviale kansvraagstukken op te lossen zoals Arthur Engel gedemonstreerd heeft op het niveau van de middelbare schoolleerling, door het volgende spelletje:
We hebben *f* 1,–. De kans dat de inzet verdubbeld wordt is $\frac{1}{2}$, de kans op verlies van de inzet is ook $\frac{1}{2}$.

Na enige malen spelen willen we $f$ 4,– hebben.
Hoe groot is de kans dit te bereiken?




Na eenmaal spelen hebben we $f$ 2,– of niets.
De kans op beide resultaten is $\frac{1}{2}$.
Hebben we $f$ 2,– dan gebruiken we dit volle bedrag als inzet en krijgen $f$ 4,– of niets met kans weer $\frac{1}{2}$.
De kans om te verliezen is $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, zoals uit bovenstaand diagram blijkt.
De kans om $f$ 4,– te bereiken is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Nu willen we proberen $f$ 3,– te bereiken met hetzelfde spel.
Het diagram wordt nu:




Hebben we nu $f$ 2,– dan leggen we vervolgens $f$ 1,– in om te proberen $f$ 3,– te bereiken, maar we kunnen dan ook op $f$ 1,– uitkomen, zodat we weer kunnen proberen $f$ 3,– te bereiken.

De kans op verlies is nu:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ldots$$

De kans op bereiken van het doel is:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots$$

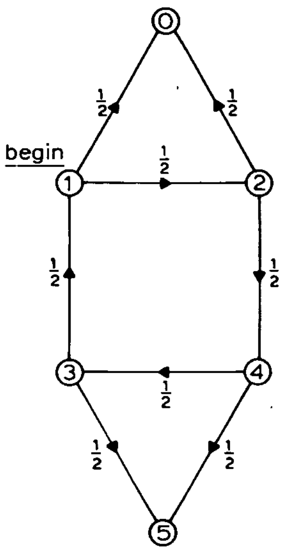
Stellen we de kans op het bereiken van $f$ 3,– gelijk aan $w$, dan geldt:

$$w = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}w,$$

zodat

$$w = \frac{1}{3}.$$

Willen we proberen *f* 5,– te bereiken dan wordt het diagram:




Hebben we na eenmaal spelen *f* 2,– bereikt, dan zetten we *f* 2,– in om te proberen *f* 4,– te bereiken.
Als dit gelukt is dan zetten we *f* 1,– in om te proberen *f* 5,– te bereiken.
Lukt dit niet dan hebben we *f* 3,– en moeten we *f* 2,– inzetten om alsnog te proberen *f* 5,– te bereiken.
Als dit niet lukt hebben we de beginsituatie weer bereikt en kunnen verder spelen.
Stellen we de kans op verlies $\ell$, dan geldt:

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\,\ell.$$

Zodat

$$\ell = \frac{4}{5}.$$

Stellen we de kans op het bereiken van het doel $w$, dan is:

$$w = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\,w, \text{ zodat } w = \frac{1}{5}.$$

Wilt u meer ideeën over het onderwijs in deze materie dan kan ik u het verslag van de eerste internationale C.S.M.P. conferentie, gehouden in 1969, warm aanbevelen.
Het is een nogal prijzig boek met de volgende titel:
*The teaching of probability & Statistics* – Edited by Lennart Råde.
Uitgegeven door Alingvist & Wiksell, Stockholm 1970.
(Geheel geschreven in het Engels.)

Een ander boek, samengesteld door the joint committee on the curriculum in statistics and probability of the american statistical association and the national council of teachers of mathematics, is een beschrijving van vele statistische onderzoeken die plaatsgevonden hebben op gebied van biologie, sociologie, politiek enz.
Dit boek is niet bedoeld als een leerboek maar wil slechts informatie verstrekken. Voor docenten die lesgeven in de statistiek van harte aanbevolen. De titel is: 'Statistics: A guide to the unknown, edited by Judith M; Tanur.
Uitgegeven door: Holden – Day, Inc. San Fransisco, California U.S.A. 1972.

Groep 19 (zitting 7)

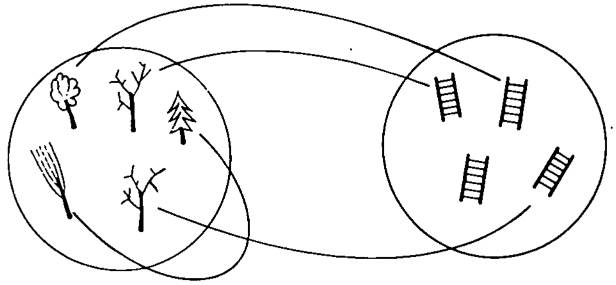
Prof. H. Whitney
Institute for advanced study,
Princetown-USA
N.J. 08540 USA.

Zijn wij op de verkeerde weg met de wiskunde op het basisonderwijs?

Whitney trekt van leer tegen de 'moderne wiskunde' waarbij veelal sprake is van misleiding en schijnvernieuwing en *niet* van een handreiking aan de leerling.
O, ja de kinderen die op school hun eigen weg zoeken krijgen alle hulp: zij redden het wel.
Maar wat komt er terecht van de kinderen (en zij zijn veruit in de meerderheid) die niet hun eigen weg zoeken? Zij worden door de 'moderne' wiskundeboeken in de steek gelaten.

a *1 – 1 relatie*

vijf bomen, vier ladders. In wezen stellen de kinderen eerst vast dat er 5 bomen en 4 ladders zijn.



Nu moeten zij de relatie vaststellen, en trekken daarbij een lijn tussen 2 bomen en niet naar een ladder.
Zodat zij i.p.v. een boom over te houden, plotseling een ladder teveel hebben. De leraar corrigeert en zowaar, na 50 minuten is het gelukt. Het kind heeft hoogstens wat leren tekenen en er is weer een aanzetje tot 'ik snap niets van wiskunde'. Maak de zaak niet moeilijker voor het kind, laat het gewoon tellen.

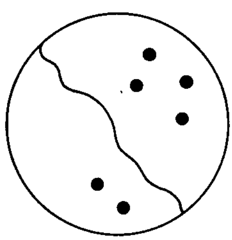
b *hoe telt men voorbij 10*
Modern gaat het bij ons zo: 8 + 4 = 8 + (2 + 2) = (8 + 2) + 2 = 10 + 2 = 12. Ja heus, zij leren de associatieve eigenschap gebruiken, maar rekenen beslist niet. Realiseer je het effect van een dergelijk gereken op het kind.
Het kan toch zo veel eenvoudiger. Neem 10 rode en 10 blauwe kralen op een ijzerdraadje met 2 paperclips.



Eén opslag maakt het duidelijk voor het kind dat 8 plus 4 als resultaat 12 geeft. Ook aftrekken is gemakkelijk. En het kind hoeft niet te gokken: hij ziet het voor zich en *doet*. Geef het kind vooral ook *tijd* om zèlf te ontdekken en conclusies te trekken, verander dus 8 plus 4 is 12 niet te snel in 8 + 4 = 12.

c *die verdomde plaatjes*
Tekeningen bij de opgaven zijn vaak een belasting voor het kind:
- het uitrekenen is op zichzelf al moeilijk genoeg,
- daarbij komt nu nog het begrijpen van het plaatje.

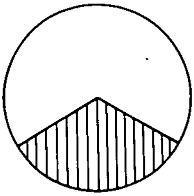
4 + 2 = 6
2 + 4 = 6



Laat de leerkracht beseffen wat hij dóet zodat hij bij al het 'moderne' gedoe niet de eigenlijke problemen van de kinderen vergeet.
Er worden teveel woorden gebruikt, teveel symbolen, zodat de kinderen door de bomen het bos niet meer zien. Het kind leert op school de onderwijzer te volgen en niet te vergeten de boeken door te werken en wordt klaargestoomd voor de volwassen verzuchting 'gooi de wiskunde maar in m'n pet'. De kinderen worden immers aan het werk gezet voordat de daartoe benodigde begrippen operationeel zijn.
Adam en Eva *zagen* in het paradijs eerst de dieren en gaven *daarna* pas namen. Zo dient het gevoel bij het kind *goed* te werken vooraf te gaan aan het aanleren van

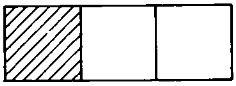
namen. Laat het kind toch eerst inzicht verwerven. Het is pas nuttig over deelverzamelingen e.d. te spreken als het kind ervaring heeft opgedaan en zich op een hoger abstractie-niveau bevindt.

d *breuken*



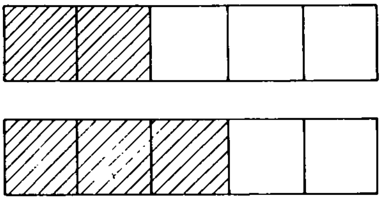
Het kind leert dat $\frac{1}{3}$ koekje een derde gedeelte is.
(vergeet vooral niet te arceren)

Het kind leert óók dat $\frac{1}{3}$ rechthoek een derde gedeelte is.
(vergeet vooral niet te arceren)



Nu wordt voor het kind de verwarring compleet:
is $\frac{1}{3}$ koekje gelijk aan $\frac{1}{3}$ rechthoek?
Hij weet dat het niet kan en schrapt dus het woordje 'vierkant'.
Maar voor zijn gevoel klopt het niet.
Nu wil het kind intelligent *zelf* de zaak uitzoeken.

Hij tekent twee rechthoeken onder elkaar en gaat $\frac{2}{5}$ vierkant optellen bij $\frac{3}{5}$ vierkant, en komt tot de conclusie dat het antwoord $\frac{1}{2}$ is.



(Immers de helft van zijn plaatjes is gearceerd). De leerkracht zegt dat het antwoord logisch niet $\frac{1}{2}$ maar 1 is, waardoor het kind dat dacht intelligent te redeneren, helemaal in de war raakt.
Alweer een kandidaat voor de groep die het verder wel gelooft.
Conclusie: wees voorzichtig met plaatjes bij breuken.

e *suggestie*

Neem een velletje gelinieerd papier en een elastiekje. Rek het elastiekje zover uit totdat het de lengte heeft van 5 cm en geef dan met viltstift op het elastiekje de verdeling aan.
Nu kan het elastiekje gebruikt worden om een nuts of stuk koek in vijf gelijke delen te verdelen.
Met het elastiekje kan je ook een sliert drop in vijf stukken verdelen. Moet het in zevenen?
Geen nood, met een ander elastiekje gaat dat gesmeerd.
Extra voordeel: het kind leert ook dat het elastiekje niet al te nauwkeurig is (goede opzet voor later).

# Gelijkvormige matrices

Dr. W. BURGERS
Wassenaar

Naar aanleiding van het gelijknamige artikel van Dr. G. Bosteels (Euclides, oktober 1970, blz. 53 e.v.) zou ik het volgende willen opmerken:

1 $A \sim B \Leftrightarrow A = X^{-1} BX \Leftrightarrow XAX^{-1} = B \Leftrightarrow B \sim A$.
2 $A \sim B \Rightarrow$

A en B hebben dezelfde karakteristieke vergelijking, dus dezelfde eigenwaarden, al of niet reëel.
$\det(B - xI) = \det(XAX^{-1} - XxIX^{-1}) = \det X(A - xI)X^{-1} =$
$\det X \cdot \det(A - xI) \cdot \det X^{-1} = \det(A - xI)$ (zie blz. 59).

In het genoemde artikel is

$$sp_1 = \Sigma a_{ii}$$

$$sp_2 = sp\,A^2 = sp\,\overset{-1}{X} AX \,.\, \overset{-1}{X} AX = sp\,D^2 = \Sigma \lambda_i^2\,,$$

waarin $\lambda_i$ de eigenwaarden zijn, D de diagonaal of driehoeksvorm van A.

$$sp_k = sp\,A^k = \Sigma \lambda_i^k$$ [1]).

We voeren nu een nieuw soort spoor in.

$$sp_1\,A = \Sigma a_{ii}\,;$$

Onder $\overline{sp}_2$ A verstaan we de som van de twee bij twee determinanten uit det A, waarvan de hoofddiagonaal langs die van det A valt.
We noemen deze respectievelijk enkel- en dubbelspoor. Zo heeft men dus tripelspoor, $n$-tupelspoor.

Stelling.
Gelijkvormige matrices hebben gelijke gelijknamige sporen.
Deze stelling vereenvoudigt de formule op blz. 57.
Is de karakteristieke vergelijking

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots (-1)^n a_n = 0$$

dan geldt:

$$a_1 = \overline{sp}_1\,A,\; a_2 = \overline{sp}_2\,A,\text{ algemeen } a_k = \overline{sp}_k\,A$$

1) Op blz. 59 komt een drukfout voor. Er staat $sp_3 = \det M = 7$; maar $sp_3 = 245$ en $\det M = 7$.

We lichten dit eerst toe aan de hand van het voorbeeld op blz.59.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$$

$$a_1 = \overline{\text{sp}}_1\ A = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$a_2 = \overline{\text{sp}}_2\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 15$$

$$a_3 = \overline{\text{sp}}_3\ A = \det A = 7$$

De vergelijking luidt: $x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_3x + a_4 = 0.$$

$$a_1 = 2 + 3 + 4 + 1 = 10$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 24$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 18$$

$a_4 = \det A = 7$

De vergelijking is dus: $x^4 - 10x^3 + 24x^2 - 18x + 7 = 0.$

Nu het bewijs.

We nemen een 4 bij 4 matrix. Dit bewijs kan eenvoudig gegeneraliseerd worden.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 - x & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 - x & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 - x \end{vmatrix}$$

$\det(A - xI)$ kan geschreven worden als de som van $2^4$ determinanten en wel:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & -x & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & -x & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -x & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & -x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -x & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & -x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & -x & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & -x & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & -x & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & a_2 & 0 & a_4 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \\ 0 & c_2 & -x & c_4 \\ 0 & d_2 & 0 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & d_2 & d_3 & -x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & -x & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & -x & c_4 \\ d_1 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & -x & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 \\ d_1 & 0 & d_3 & -x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & -x & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & -x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -x & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ b_1 & -x & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ d_1 & 0 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & a_4 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ c_1 & c_2 & -x & c_4 \\ d_1 & d_2 & 0 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -x \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

en men leest de coëfficiënten af. En daar gelijkvormige matrices dezelfde karakteristieke vergelijking hebben is de stelling bewezen.

# Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

LXXXVII *Michel Chasles of de tragedie der goedgelovigheid*

Ruim honderd jaar geleden, in februari 1870, had voor de zesde kamer van het Tribunal correctionnel te Parijs een zitting plaats die het formele einde betekende van een opzienbarende wetenschappelijke controverse. De strijd betrof fundamentele vragen uit de geschiedenis der natuurwetenschappen in de zeventiende eeuw; hij speelde zich af in de eerbiedwaardige, toen reeds twee eeuwen oude *Académie des Sciences,* en er werd ook aan deelgenomen door geleerden uit Engeland, Italië en Nederland.
De *accusé* in de strafzaak was ene Vrain Lucas, een onbetekenend en onontwikkeld man, die toch over een bepaalde met sluwheid gemengde intelligentie moet hebben beschikt. Hij werd beschuldigd van het misdrijf *escroquerie,* van welk begrip de *Code pénal* in art.405 door middel van een lange zin de definitie geeft en dat in onze taal oplichting heet. De centrale figuur in de gebeurtenis was echter de voornaamste *témoin:* niemand minder dan de grote wiskundige Chasles, *géomètre de génie,* voor wie de gang der dingen een persoonlijke tragedie betekende. Het onbegrijpelijke gedrag van deze integere man in de aangelegenheid moet hebben berust op een bepaalde karakterstructuur waarin blijkbaar stijfhoofdigheid en goedgelovigheid samengingen. Een zekere geestdrift voor de glorie van *la patrie* kan van invloed zijn geweest en wellicht ook zijn gevorderde leeftijd; de beklaagde sprak bij zijn verhoor van *le vieux monsieur.* In elk geval was bij hem in deze periode de kritische zin afwezig, die men een mathematicus ook buiten zijn vakgebied veelal toedicht.
De biografie van Michel Chasles (1793-1880) doet een levensgang zien die sinds lang niet meer mogelijk is. Hij doorliep de École polytechnique, werkte nog actief mee aan de verdediging van Parijs in 1814, maar nam daarna ontslag als officier en vestigde zich als bankier in de provinciestad Chartres, blijkbaar met goed gevolg want hij was later een vermogend man. Tijdens deze periode die bijna dertig jaar duurde beoefende hij in zijn vrije uren de wiskunde en hij schreef een lange reeks artikelen en boeken. Evenals bij voorbeeld de jurist Cayley en de theoloog Salmon behoort hij dus tot de grote amateurs[1]. In 1841 aanvaardde hij een leerstoel voor

geodesie en mechanica aan de École waar hij van 1846 af de voor hem geschapen *cours de géométrie supérieure* verzorgde. Voortbouwend op de grondslagen door landgenoten als Monge en Poncelet gelegd, heeft Chasles de projectieve meetkunde geconsolideerd en met menig begrip, theorema en methode verrijkt. Zijn samenvattend hoofdwerk *Aperçu historique*[2] munt niet uit door een heldere compositie, maar is ook nu nog voor enkelen het lezen waard. Een goede samenvatting van de betekenis van Chasles voor de ontwikkeling der meetkunde vindt men bij Klein[3], die ook aandacht geeft aan de gebeurtenissen, waaraan dit opstel is gewijd.

In haar zitting van 15 juli 1867 legde Chasles aan de Academie, waarvan hij sinds 1851 lid was, een zestal geschreven documenten over van de hand van Blaise Pascal (1623-1662), en wel twee brieven aan Boyle en vier ondertekende blaadjes met notities, alles gedateerd kort na 1650.

De inhoud van deze autografen was sensationeel. Er kon uit blijken dat Pascal in die jaren reeds kennis droeg van het bestaan ener algemene aantrekkingskracht, die tussen twee massa's evenredig is met die massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand. Daar Newton (1642-1727) deze fundamentele wet eerst had uitgesproken in de eerste editie der *Principia* (1687), zou daaruit volgen dat de historische waardering van de ontdekking geheel moest worden herzien. Bovendien suggereerden deze en vele volgende stukken dat Newton's vinding niet alleen reeds dertig jaren eerder het bezit was van de Franse filosoof en mathematicus maar zelfs dat de eerste zijn resultaten aan Pascal had ontleend.

Met de mededeling van Chasles begon een strijd over de echtheid van de documenten die meer dan twee jaren zou duren. Wie de *Comptes rendues hebdomadaires* van de Academie van 1867-1869 laat lichten uit de depots waar zij vredig rusten, kan het gevecht van week tot week volgen.

De instelling werkte namelijk zowel erg vlot als met grote openheid. Zij vergaderde elke maandag en reeds een week later was het gedrukte verslag ter algemene beschikking dat niet alleen de notulen bevatte maar ook de volledige tekst van de aangeboden stukken en bij de Academie ingekomen brieven.

Velen bemoeiden zich met de zaak en uitten met uiteenlopende beslistheid en hoffelijkheid hun twijfel aan de echtheid der documenten. Chasles stond vrijwel alleen bij zijn verdediging. Dat de strijd zo lang heeft kunnen duren kan enerzijds worden begrepen uit zijn wetenschappelijk aanzien en moreel gezag, anderzijds uit de door hem, te goeder trouw, gevolgde tactiek. Op elk tegenargument antwoordde hij een week daarna met nieuwe stukken (soms in de voorafgaande dagen gefabriceerd, zoals later zou blijken), brieven van zeer verscheiden personen uit verscheiden tijdperken, waardoor de schermutseling voortdurend werd verplaatst naar andere fronten. Het aantal dezer documenten bedroeg tenslotte meer dan driehonderd.

De Academie stelde enige malen commissies in om de zaak te onderzoeken, maar tot definitieve uitspraken kon men aanvankelijk niet geraken. Uiteraard werd ook de hulp ingeroepen van grafologen en van deskundigen op het gebied van papiersoorten en inkten, maar hun conclusies waren even twijfelachtig en tegenstrijdig als een kwart eeuw later bij het onderzoek van het beruchte borderel in *l'affaire*

*Dreyfus.* Wie zich nog de discussies over valse Van Goghs en valse Vermeers herinnert zal dat niet zo verwonderlijk vinden.
Het kan niet de bedoeling zijn de gebeurtenissen hier op de voet te volgen; wij beperken ons tot enkele hoogtepunten uit deze merkwaardige historie.
Reeds in de zitting van 22 juli verklaarde Duhamel, met duidelijke argumenten, dat hij niet in de echtheid der stukken kon geloven en het op Newton te houden. Binnen de Academie behoorden hij en de meer temperamentvolle astronoom Leverrier in de komende jaren tot de scherpste tegenstanders van Chasles.
In dezelfde bijeenkomst had deze een correspondentie overgelegd van Pascal met de (twaalfjarige) Newton. Een week later lagen er brieven ter tafel van twee grondige kenners van leven en werk van Pascal waarin onomwonden werd verklaard dat de documenten waren 'certainement faux et fabriqués à plaisir'; tot de argumentatie behoorde ondermeer het feit dat Pascal nimmer enige belangstelling voor astronomie had getoond. Op 12 augustus werd een (bepaald onhoffelijke) brief voorgelezen van het buitenlands lid David Brewster, biograaf van Newton. Sir David, die over het trouw bewaarde archief van de grote man de beschikking had, ontkende pertinent dat daarin van enig contact met Pascal sprake was.
Een zeer concrete en zou men zeggen niet te pareren aanval kwam op 12 september eveneens uit het Verenigd Koninkrijk van de hand van de astronoom Grant te Glasgow. Daaruit bleek dat gegevens zoals de massa's van de zon, Jupiter, Saturnus en de aarde alsmede de versnelling van de vrije val, die door Pascal in de jaren vijftig zouden zijn gebruikt als basis voor zijn beschouwingen, niet dezelfde waren als die uit de Principia van 1687, maar identiek met de veel exactere uit de tweede editie van 1726. Maar het kwaad kan bewonderswaardig vindingrijk zijn: op 7 oktober kon Chasles brieven overleggen waaruit bleek dat Pascal zijn uitnemende gegevens rechtstreeks had verkregen van Galilei (1564-1642) en dat zij gebaseerd waren op diens astronomische waarnemingen van 1641. Daarbij was onder meer sprake van de manen van Saturnus; toen Grant er aan herinnerde dat de eerste daarvan pas in 1655 door Huygens was ontdekt, volgden documenten waaruit zou blijken dat Galilei de telescoop aan zijn vriend Pascal had gezonden, waarbij het instrument in handen kwam van Huygens, die met de eer was gaan strijken. Grant trachtte dit weefsel van leugens te verscheuren met de opmerking dat Galilei sinds 1637 blind was, maar prompt volgden er brieven van deze aan vertrouwde vrienden, waaruit bleek dat hij blindheid voorwendde om de Inquisitie te misleiden, waarmee hij in moeilijkheden verkeerde.
Reacties op dit alles konden niet uitblijven. Op 8 december wordt een waardige brief voorgelezen van de hoogleraar Harting uit Utrecht die over de aantekeningen van Huygens beschikt en de aantijgingen als geheel ongerechtvaardigd verwerpt. Uit Rennes en uit Florence komen verontwaardigde berichten waaruit onder meer blijkt dat Galilei nooit van zijn leven enige franse brief heeft geschreven. Maar de polemiek gaat voort, met tussenpozen, gedurende het gehele jaar 1868 en het begin van 1869; men krijgt de indruk dat de tegenstanders niet overtuigd maar wel strijdensmoe zijn, terwijl Chasles onverdroten doorgaat met het aanbieden van steeds meer documenten aan het bureau der Academie. Dan komt een voorlopige, bijna ongelofelijke apoteose: in zijn zitting van 5 april 1869 verklaart het

roemrijke wetenschappelijke instituut de stukken te zijn autentiek. In de betrokken verklaring spreekt de *secrétaire perpétuel* over 'les caractères évidents de vêtusté que présentent les manuscrits placés devant lui sur le bureau, mais il reconnaît ensuite, avec M. Chasles, que les meilleurs garants de leur origine sont les preuves morales qui ressortent de leur lecture'.
De triomf duurt een volle week. Op 12 april vraagt een zekere Breton de Champs aandacht voor een der bronnen waaraan de falsificaties zullen zijn ontleend: de teksten van achttien stukken uit de collectie-Chasles komen letterlijk voor in een boek uit 1761 van de auteur Savérien. De vervalser wordt geen rust gegund. Reeds op 19 april kan Chasles slagvaardig repliceren. Het is andersom: Savérien heeft voor zijn werk de originele documenten benut. Zij waren destijds in het bezit van madame de Pompadour; er wordt een schrijven overlegd van Montesquieu die haar verzoekt Savérien toegang tot de verzameling te geven en een briefje van de markiezin aan haar bibliothecaris waaruit de toestemming blijkt. Als Breton het onaanvaardbaar noemt dat Savérien wel onbelangrijke gegevens heeft overgenomen en niet de veel gewichtiger historische feiten, dan volgt op 26 april het antwoord: de Pompadour heeft al spoedig de toestemming ingetrokken en wel omdat Savérien haar een aanhanger van Voltaire was gebleken. De gevechten vlammen weer op. Leverrier wordt opnieuw actief. De strijd concentreert zich nu op Montesquieu en de periode om 1729, het sterfjaar van Newton. De vervalser maakt een faux pas, maar redt zich uit het matnet door twee reizen van Montesquieu, incognito, naar Engeland te construeren waarvan nooit enige biograaf heeft geweten.
Maar het einde nadert. Leverrier verzamelt systematisch alle bedenkingen in de verlopen jaren gerezen en leest in de zittingen van 21 juni en 5, 12, 26 juli 1869 een uitvoerige memorie voor met de conclusie dat alle stukken vals zijn; hij weet intussen ook een reeks geschriften uit de 18de en 19de eeuw aan te wijzen waaraan de teksten zijn ontleend. Men besluit tot een *test-case;* onder de honderden brieven van Galilei, alle met hetzelfde handschrift, die Chasles zegt te bezitten is er een uit 1639, de periode van zijn al dan niet vermeende blindheid. Een fotocopie gaat naar Florence, waar men alles weet van Galilei. De expertise is vernietigend: het stuk is een vervalsing en de tekst is ontleend aan een boek uit 1856. Een laatste stuiptrekking volgt; Chasles zegt zich vergist te hebben en twee brieven verwisseld. Onder protest van Leverrier die nieuwe machinaties vreest, gaat een ander stuk naar Florence. Het blijkt even onecht als het eerste en men verzoekt aldaar van verdere zendingen verschoond te blijven.
In de tragische zitting van 13 september 1869 legt Chasles een verklaring af, door de Parijse bladen gretig overgenomen, met de bekentenis de dupe te zijn geweest van een oplichter. Als zijn slechte genius wijst hij Vrain Lucas aan, die dadelijk bekent met de merkwaardige, maar ook wel begrijpelijke verholen trots en voldoening, die wij ook van een van Meegeren ons herinneren. Hij bleek gedurende acht jaren niet minder dan zevenentwintig-duizend documenten aan Chasles te hebben geleverd, alle van eigen hand, en wel voor het in die tijd enorme bedrag van honderd veertig duizend francs. Zij heetten afkomstig te zijn uit het archief van een adellijke familie, die tijdens de franse revolutie naar Amerika uitgeweken,

nu met de collectie terug was en wegens berooide staat gedwongen tot successieve verkoop, die uit familietrots en onderlinge onenigheid in het geheim moest plaatsvinden.
In zijn omgang met *le vieux monsieur* heeft Vrain Lucas blijk gegeven van een geraffineerd psychologisch inzicht; hij durfde het zelfs aan zogenaamd namens de familie voor te stellen bepaalde aankopen te annuleren, overtuigd en naar bleek terecht, dat Chasles dat verontwaardigd zou weigeren. Diens lichtgelovigheid wordt geheel onbegrijpelijk als later aan het licht komt dat zich in zijn collectie de meest fantastische stukken bevinden, alle in oud-frans, brieven van Julius Caesar, Karel de Grote, van Abélard aan Heloïse, van Rabelais aan Luther, van Jehanne dicte la Pucelle, van Archimedes aan Heron, zelfs van Lazare le ressuscité à St. Pierre. Aan Vrain Lucas zal men bepaalde eigenschappen van ijver, slagvaardige fantasie, zelfvertrouwen en enige kennis van historische zaken niet kunnen ontzeggen. Hij was aanvankelijk notarisklerk in Chataudun, en later in Parijs lange tijd verbonden aan een *cabinet généalogique*, een commerciële instelling, die familiestambomen leverde en aanspraken op adellijke titels aan ijdele cliënten. Voor een man als hij een verderfelijke leerschool.
De strafzaak was juridisch eenvoudig; de feiten stonden nu wel vast en werden niet ontkend. Het getuigenis van Chasles betekende het onzegbaar trieste laatste openbare optreden van een groot matematicus. Aan zijn goede trouw is door niemand getwijfeld. Het pleidooi van *maître* Heilbronner begon met de verklaring dat la loyauté et la bonne foi de M. Chasles ont éte audessus de tout soupçon, maar bepleitte daarna met uitnemende retoriek verzachtende omstandigheden voor de beklaagde, gezien de onbegrijpelijke lichtgelovigheid die deze bij zijn machinaties had ontmoet. Het vonnis was relatief mild: twee jaar gevangenisstraf voor *escroquerie* waar een maximum van vijf jaar op staat.
Twee getuigen-deskundige gaven spoedig na de rechtszitting in een brochure uitvoerig verslag van de gehele geschiedenis met inbegrip van een inventaris der documenten, een aantal facsimile's en de gang van het proces[4].
De verdere gebeurtenissen in het Frankrijk van 1870 zullen de herinnering aan het tragische lot van Chasles hebben vervaagd. Acht jaar na zijn dood herleefde zij in een *roman à clef* van Daudet[5]; de auteur, een goed verteller, ontleende in vele van zijn boeken de intrige aan reële feiten. De scene is verlegd naar de Académie française, vandaar de ironische titel. Het verhaal volgt, soms tot in details, het voorbeeld maar heeft een veel grovere structuur doordat de schrijver de wetenschappelijke faam van de hoofdfiguur op de vervalste stukken doet berusten. Van het psychologisch zo interessante samenspel met de bedrieger komt vrijwel niets terecht. Wij prefereren de lectuur van de Comptes Rendus verre boven die van de oppervlakkige roman. De werkelijkheid van de wonderlijke zaak-Chasles is veel boeiender dan haar verbeelding.

1 J. L. Coolidge, The mathematics of great amateurs, Oxford (1949). In dit boek komen zij overigens geen van drieën voor; de negentiende eeuw wordt daarin slechts vertegenwoordigd door Horner en Bolzano.

2 M. C h a s l e s, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne (Paris, 1837).
Ongewijzigde herdrukken verschenen in 1875 en 1888. De 'Histoire de la géométrie' (p. 1-269) wordt gevolgd door 'Notes' (p. 271-562) waarbij uitvoeriger wordt ingegaan op bepaalde problemen.

3 F. K l e i n, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19.Jahrhundert, I (Berlin, 1926), 140-147.

4 H. B o r d i e r e t E. M a b i l l e, Une fabrique de faux autographes ou récit de l'affaire Vrain Lucas (Paris, 1870, 110 p.).

5 A l p h o n s e D a u d e t, L'immortel; moeurs parisiennes (Paris, 1888).

# Een tweetal vraagstukken uit de analytische meetkunde op te lossen met behulp van eenvoudige eigenschappen der vlakke meetkunde

G. E. KIERS
Den Haag

Vraagstuk 1.
*De parabool* $y^2 = 2px$ *en de cirkel* $x^2 + y^2 = r^2$ *snijden elkaar onder een hoek* $\varphi$. *Welke waarden kan* tg $\varphi$ *aannemen, indien p en r variabel zijn?*

Vredenduin: Analytische Meetkunde 6e druk blz. 78.

Oplossing.
Voor een bepaalde waarde van $p$ en $r$ snijden parabool en cirkel in figuur 1 elkaar in $C$. De raaklijn $a$ in $C$ aan de parabool snijdt de $x$-as in $B$ zó, dat $OA = OB$ (dit is de enige eigenschap, die we moeten gebruiken en die niet thuis hoort in de vlakke meetkunde). De raaklijn $b$ in $C$ aan de cirkel staat loodrecht op $OC$. Als we de parabool en de cirkel uit de figuur met een willekeurige factor vermenigvuldigen zijn de productfiguren weer een parabool en een cirkel van de stelsels uit het bovenstaande vraagstuk. De productfiguur $C'$ (niet in de figuur aangegeven) van $C$ ligt op de rechte $OC$. De raaklijnen in $C'$ aan de parabool en cirkel zijn evenwijdig met resp. $a$ en $b$, zodat de hoeken waaronder de krommen elkaar in $C$ en $C'$ snijden aan elkaar gelijk zijn. Om dus het waardeverloop van $\varphi$ en tg $\varphi$ na te gaan, kunnen we volstaan met het snijpunt $C$ de rechte $c$ loodrecht op de $x$-as te laten doorlopen.

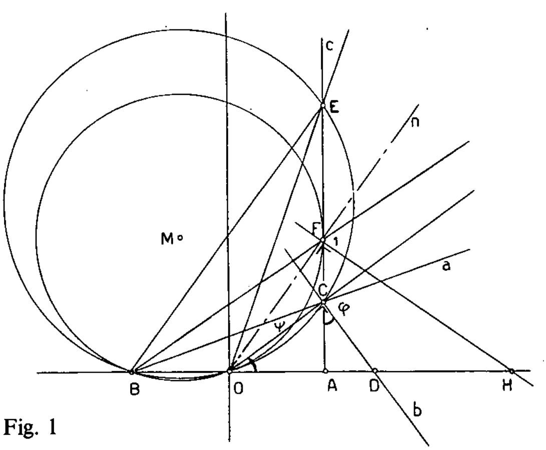


Fig. 1

Uit $\angle OCD = 90°$ volgt $\psi = \angle BCO = 90° - \varphi$. We onderzoeken nu het waardeverloop van $\psi$, als $C$ de rechte $c$ doorloopt. Als $\psi$ maximaal is, is $\varphi$ minimaal en omgekeerd. We brengen een cirkel aan door $B$, $O$ en $C$, die de rechte $c$ voor de tweede maal in $E$ snijdt. De hoeken $\psi$ in $C$ en $E$ zijn aan elkaar gelijk, hetgeen dus ook geldt voor de hoeken $\varphi$ in deze punten. Snijden een parabool en een cirkel uit de bundels elkaar in een punt $P$ (niet getekend) van de rechte $c$, dan is $\angle BPO$ kleiner dan, gelijk aan of groter dan $\psi$ al naar gelang $P$ ligt boven $E$ dan wel tussen $A$ en $C$, samenvalt met $C$ of $E$ of ligt op het lijnstuk $CE$ binnen de cirkel. De hoek waaronder de parabool en cirkel elkaar snijden is dan resp. groter dan, gelijk aan of kleiner dan $\varphi$.

Uit de figuur volgt verder:

$$AC \times AE = OA \times OB = 2 \times OA^2 \quad \text{waaruit volgt} \quad \frac{AC}{OA} \times \frac{AE}{OA} = 2 \quad \text{en}$$

$\text{tg}\angle COA \times \text{tg}\angle EOA = 2$. M.a.w.:

**De verzameling der snijpunten van de parabolen en cirkels, die elkaar onder een bepaalde hoek $\varphi$ snijden, bestaat uit twee halfrechten $OC$ en $OE$, waarvan het product der richtingscoëfficiënten gelijk is aan 2.**

Tenslotte construeren we de cirkel, die door $B$ en $O$ gaat en in $F$ aan de rechte $c$ raakt. Voor ieder snijpunt $P$ op de halfrechte $c$, dat niet samenvalt met $F$ geldt: $\angle OPB < \angle OFB$. Dientengevolge bereikt $\psi$ in $F$ een maximale en $\varphi$ een minimale waarde, zodat:

**De verzameling der snijpunten van de parabolen en cirkels, die elkaar onder een zo klein mogelijke hoek snijden, is de halfrechte $n$ met $O$ als eindpunt en waarvan de richtingscoëfficiënt $\sqrt{2}$ is.**

Uit de figuur leiden we verder af:

a $AF^2 = AO \times AB = \frac{1}{2} \times AB^2$ en dus $\text{tg}\angle FBA = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

b $AF^2 = AO \times AB$ en $AF^2 = AO \times AH$, waaruit volgt: $AB = AH$, $\blacktriangle BFH$ is gelijkbenig en $\angle F_1 = 2 \times \angle FBA$.

c $\text{tg}\angle F_1 = \text{tg}\, 2 \times \angle FBA = \dfrac{2 \times \text{tg}\angle FBA}{1 - \text{tg}^2\angle FBA} = \dfrac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ en $\angle F_1 = 70°32'$.

De hoek $\varphi$ voldoet dientengevolge aan de voorwaarde:

$$70°32' \leqq \varphi < 90° \quad \text{en} \quad \text{tg}\,\varphi \geqq 2\sqrt{2}$$

Opmerking: Laten we $p$ alle reële waarden doorlopen en nemen we ook het tweede snijpunt van parabool en cirkel erbij, dan bestaat de verzameling der snijpunten waarbij $\varphi$ minimaal is uit 2 rechten, n.l. de rechte $OF$ en het spiegelbeeld van deze t.o.v. de $x$-as.

Vraagstuk 2.

*Gegeven zijn de cirkels* $x^2 + y^2 + 2p(x - a) = 0$ . . . . . . . . . . . (1)

$x^2 + y^2 + 2q(y - a) = 0$ . . . . . . . . . . . (2)

*waarbij a positief is en* $p \neq 0$.

a *Aan welke voorwaarde moeten p en q voldoen opdat de cirkels elkaar loodrecht snijden.*

b *Bepaal de verzameling van de snijpunten der beide cirkels, indien p en q verschillende waarden aannemen doch voldoen aan de voorwaarde onder a gevonden.*

Prop. examen T.H. Delft 1920.

Oplossing.

Van de cirkels zijn de middelpunten $M(-p;\, 0)$ en $N(0;\, -q)$, de stralen $r_1 = \sqrt{p^2 + 2pa}$ en $r_2 = \sqrt{q^2 + 2qa}$.

De cirkels snijden elkaar loodrecht, indien:

$$r_1^2 + r_2^2 = p^2 + q^2$$
$$p^2 + 2pa + q^2 + 2qa = p^2 + q^2$$
$$q = -p$$

Eliminatie van $q$ uit (1) en (2) geeft:

$$x^2 + y^2 + 2p(x - a) = 0 \quad \text{(1a)}$$

$$x^2 + y^2 - 2p(y - a) = 0 \quad \text{(2a)}$$

$M(-p; 0)$, $N(0; +p)$, $r_1 = \sqrt{p^2 + 2pa}$ en $r_2 = \sqrt{p^2 - 2pa}$.

Voor reële waarden der stralen moet hierbij voldaan worden aan de voorwaarden

$p \geqq 2a$ of $p \leqq -2a$.

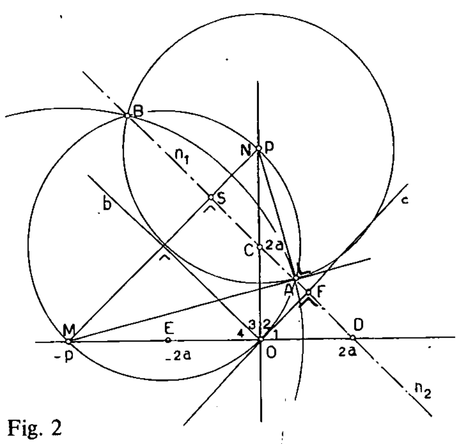


Fig. 2

In figuur 2 zijn voor een bepaalde waarde van $p$ de cirkels $M$ en $N$ aangegeven. Daar $\angle MAN = \angle MBN = 90°$ liggen de punten $A$, $B$ en $O$ op de cirkel met $MN$ tot middellijn. Het middelpunt van deze veranderlijke cirkel ligt op de bissectrice van $\angle O_{3.4}$ en al deze cirkels hebben de bissectrice $c$ van $\angle O_{1.2}$ tot gemeenschappelijke raaklijn. $A$ ligt rechts en $B$ links van de $y$-as.

We onderzoeken nu de volgende gevallen:

$p > 2a$ en eindig, $p = 2a$ en $p$ oneindig groot.

**1e geval:** $p > 2a$ en eindig.

In $\triangle MNA$ geldt $\dfrac{NS}{MS} = \dfrac{NA^2}{MA^2} = \dfrac{p^2 - 2ap}{p^2 + 2ap} = \dfrac{p - 2a}{p + 2a}$

waaruit volgt $\dfrac{NS}{NM} = \dfrac{p - 2a}{2p}$ dus $\dfrac{NS}{p\sqrt{2}} = \dfrac{p - 2a}{2p}$

zodat $NS = \frac{1}{2}(p - 2a)\sqrt{2}$, $NC = p - 2a$ en $OC = 2a$.

De rechte $AB$ snijdt dientengevolge de $y$-as in het vaste punt $C(0; 2a)$ en de verzameling der punten $A$ en $B$ ligt op de rechte door $C$, die de $x$-as onder een hoek van 135° snijdt. Alle punten $A$ liggen op de halfrechte $n_2$ en alle punten $B$ op de halfrechte $n_1$, die beide $C$ als eindpunt hebben.

**2e geval:** $p = 2a$.

$M$ valt in $E$ en $N$ in $C$, $r_1 = 2a\sqrt{2}$ en $r_2 = 0$. De punten $A$ en $B$ vallen samen in $C$.

**3e geval:** $p$ is oneindig groot.

Het middelpunt van de cirkel met $MN$ als middellijn is het oneindig verre punt van de rechte $b$. De cirkel ontaardt in de bissectrice $c$. Het punt $A$ valt in $F$ en $B$ wordt het oneindig verre punt van $n_1$.

Conclusie:

**De verzameling der punten $A$ is het lijnstuk $CF$, de verzameling der punten $B$ is de halfrechte $n_1$ met $C$ als eindpunt.**

Opmerking: Geven we aan $p$ ook de waarden kleiner dan of gelijk aan $-2a$, dan is de verzameling der punten $A$ het lijnstuk $CD$ en de verzameling der punten $B$ de halfrechten $n_1$ en $n_2$ resp. met $C$ en $D$ als eindpunten.

# Van Nunez tot Gudermann (loxodroom en logaritme)

TJ. S. VISSER †
Amsterdam

1 Het kostelijk Aula-boekje van D.J. Struik[1] deed mij opzien. De noot p.114 zegt 'Enige natuurlijke logaritmen vindt men bij Edmund[2] Wright, 1618 ( ); Wright was geinteresseerd in verbeterde kaarten in Mercator-projectie'.[3] Dat verband tussen ln en de wereldkaart met wassende breedten heb ik daarom nog eens nagegaan. Boeie het ook enige leerlingen.
2 Pedro Nuñez, 1492-1577, Portugees die 10 jaar in India werkte en daarna leraar werd van de kroonprins, publiceerde 1546 als Nonius ' De arte atque ratione navigatio'.[4] Hij toonde aan dat het varen in vaste kompasrichting geen rechte kan opleveren maar óók geen som van stukjes grootcirkels. Hij noemde de ruimtekromme ruitcurve (rhumba; Duitsland en Engeland gebruiken die naam nog; overigens geldt sinds 1624 door onze Snellius de term loxodroom[5].
Nuñez bevond reeds dat ze eindeloos 'om de pool kan draaien ' zonder dat punt te bereiken. Zulks doet denken aan de spiraal $\rho = a \exp m\theta$ welke John Wallis later tot de uitroep[6] bracht: 'een eindeloze curve, gelijk aan een eindige rechte! ' Astronoom Halley vond weer later dat die spiraal (vaste hoek tussen $\rho$ en raaklijn) door de hoektrouwe stereografische projectie volgt uit de loxodroom. – Nuñez gaf in eigen spaanse vertaling nog een boek uit te Antwerpen, 1567.
3 Twee jaar nadien, Egmonds onthoofding ligt ertussen, verscheen te Duisburg Mercators[7] wereldkaart met geheel nieuwe 'projectie'. Namelijk zo dat, als het goed is, een lijn van vaste kompaskoers verschijnt, op de kaart, als een rechte. Daar voor was eigenlijk meer mathesis nodig dan men toen had[8].
4 Vandaar dat 30 jaar later E. Wright, met succes, trachtte Mercator nauwkeuriger te maken: 1599; zijn tabellen zijn postuum gedrukt 1618 verg. 1. Hij moest daartoe integreren sec $\lambda$ d $\lambda$ maar the calculus was nog niet uitgevonden. Wat doe je dan? Wat Wright deed: $\lambda$ vanaf 0° laten klimmen met telkens 1′ en alle secanten optellen[9]. Zo benaderde Wright aardig $\int \sec\lambda \, d\lambda$; wij weten[10].

$$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right); \quad \ldots\ldots (1)$$

hij calculeerde dus ln! Nu snap ik Struik, zie 1.
5 Alzo: ln hangt samen met Mercator. Maar óók met de orthohyp[11]. Is er dan wellicht verband tussen Mercator en de hyperboolfuncties? Ja! Want mercatorfunctie (1) uit 4 speelt ook bij die laatste:

$$u = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

met $u$ als hyperbolisch argument en $\varphi$ de bijbehorende transcendente hoek van Lambert, 1770; Zo beeldt (1) cirkel af op orthohyp. Doch (1) is tevens in de techniek van belang[12], Christoph Gudermann[13] bekeek rond 1840 daarom algemeen:

$$y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

genaamd inverse gudermann of arg gd; de gd zelf is $y = -\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{x}$. Dat was drie eeuwen na Nuñez, zie 2 en ons opschrift. De afstand (evenaar – parallel $x$) bij Mercator wordt bepaald met de tabellen bij (1), juister dan Wright.

6 En óók de loxodroom houdt verband met de hyperboolfuncties. Want met parameters poolsafstand en 'lengte' ( $x = a \cos\psi \sin\varphi$; $y = a \sin\psi \sin\varphi$; $z = a \cos\varphi$) laat zich vinden[14] dat op de bol de loxodroom bepaald is door:

$$\cos\varphi = \operatorname{th} n\,\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(kompasrichting dan arc tg (1:$n$). Let op die th!

7 Begon 1 met kleine verbazing, 7 eindigt met verbijsterde verbaasdheid want (2); van de loxodroom op de globe, lijkt op Lobatchevsky's hoofdstelling uit zijn non-euclidische meetkunde[15]:

$$\cos(\text{parallelhoek}) = \operatorname{th}(\text{distantie}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Kon Nuñez dat dromen? Ik gisteren ook niet.

8 Dus: $\cos y = th\,x$ (of $\operatorname{tg} \frac{1}{2} y = \exp(-x)$) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (2)
stelt o.a. voor:

- in de euclidische meetkunde op een bol, de noordwest loxodroom ($\operatorname{tg}\alpha = 1:1$) als *puntenset*;
- in een non-euclidische meetkunde op een plat vlak, een oneindig ver punt als *rechtenwaaier*.
- (Die punten resp. rechten bewegen richtingtrouw. De loxodroom bereikt nooit de pool, zie 2, de waaier mist de straal met hoek 0. Bij lox is $x$ hoek, $y$ afstand; bij lob is dat andersom.)

Zo ontmoeten elkaar weer eens Alexandrië en Kazan. En ik voel me, na 1 als Sjaoel die uitging om de ezelinnen van zijn vader te zoeken doch thuiskwam met een koninkrijk; I Samuel 9.

9 Nuchtere vermelding: zeelui noemen de afstand langs de loxodroom verheid.
Niet nuchter: Bovenmeer-indianen noemen noordwest varen: naar de oneindigheid gaan. Zie 8; en lees bij Longfellow het verheven einde van held Hiawadha 'in the portals of the sunset'.[16]

**Noten**

1 D. J. Struik, Geschiedenis van de wiskunde (1965).
2 M.i. Edward
3 Slotwoorden nog niet in Struiks eerdere Concise History.

4 M. Cantor, Geschichte d.M., II, S. 388-90.
5 Struik, blz. 114.
6 Opera, I, p. 561 (1695) Citaat in E.H. Lockwood, Book of Curves (1961).
7 Gerhard Kremer = Mercator, geb. 1512 te Rupelmonde; in Leuven leerling van Gemma Frisius = Reiner Steen uit Dokkum. Reeds 1541 van M. een globe met ingetekende loxodromen. Van hem ook het woord atlas (Das Fischer Lexikon, dl Geografie, 1959). – M. stierf 1594. Thans wordt zijn kaart verdrongen door globe en Poolkaart.
8 Meridiaan en parallel moeten loodrechte rechten worden. Dus wordt parallel $\lambda$ uitgerekt met sec $\lambda$. Om tg $\alpha$ met O.W. been gelijk te laten, moet bij haar ook het stukje meridiaan sec $\lambda$ zo groot. Meridiaan tot breedte $\lambda$ wordt dan $\int_0^\lambda \sec\lambda \, d\lambda$.
9 Teaching of Algebra (1919) van T. Percy Nunn; Exc. 87: 'Mercator sailing'. Aardig boek.
10 Met D tg = $\sec^2$; D ln $y = y' : y$; $\sec^2$ : tg = 1 : sincos; overgang op halve hoek. Meer toverij dan wiskunde.
11 door D ln $x = x^{-1}$ of $x$. (D ln $x$) = 1; neem D ln $x$ als ordinaat dan wordt ln $x$ oppervlak, terwijl de kromme een orthohyp op z'n asymptoten is.
12 Bv. H. Zimmermann, Der Eisenbahn – Oberbau. (1888).
13 1798-1852; rondom 1840 in 'Crelle', VI e.v.
14 F. Frenet, Recueil d'exercices (1917) p. 262 en 324.
15 J.A. Barrau, An. Meetkunde I, blz. 352.
16 Sunset is a set that's no set. De Groene 7-8-1971, p.7.

# Vakantiecursus 1973

**Voor leraren V.H.M.O. en andere belangstellenden**

De jaarlijkse door het Mathematisch Centrum te organiseren Vakantiecursus voor Leraren V.H.M.O. en andere belangstellenden zal dit jaar plaatsvinden

in Amsterdam op 15 en 16 augustus 1973
in Eindhoven op 16 en 17 augustus 1973

ONDERWERP: 'ABSTRACTE INFORMATICA'

De eerste dag zullen twee voordrachten worden gehouden over
1) formele talen en automatentheorie
2) programmeertalen

De tweede dag drie voordrachten over
1) betrouwbaarheid van programma's
2) recursieve functies en Turingmachines
3) computerkunst (met voorbeelden).

Uitgebreidere gegevens met betrekking tot sprekers, definitieve titels van de voordrachten en de organisatie zullen zo spoedig mogelijk bekend gemaakt worden.
Inlichtingen zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O, tel. 020-947272, toestel 41 en 64.

# Boekbespreking

Dr. A. van Dop e.a., *Wiskunde bovenbouw havo*, deel 1: *Algebra en Goniometrie*, *f* 14,50; deel 2: *Algebra, goniometrie, statistiek*, *f* 9,75

Deel 1, bestemd voor de vierde klas havo begint met een uitgebreide zeer overzichtelijke herhaling van de stof uit de onderbouw.
Goniometrische functies worden vervolgens ingevoerd als afbeeldingen van de verzameling hoekgrootten naar de verzameling $\mathbb{R}$. Wat een negatieve hoek is of een hoek groter dan $2\pi$ wordt niet verklaard, bovendien zal een kritische leerling problemen hebben als men hem de functie bepaald door $f(x) = \sin x^2$ voorschotelt.
Via veel voorbeelden wordt het limietbegrip ingevoerd. Daarna worden afwisselend behandeld: machten met reële exponenten, differentiaalrekening, logaritmen en de lineair gebroken functie.
Tot slot een hoofdstuk speciale functies: wortelfuncties, logaritmische functies en exponentiële functies.

Deel 2, bestemd voor havo vijf omvat statistiek, kansrekening, afronding van de goniometrie en twee keuze-onderwerpen t.w. rijen en lineaire programmering. Er wordt aanzienlijk meer behandeld dan de examenmensen voorschrijven.
Ik noem bijvoorbeeld binomiale kansverdeling, onbetrouwbaarheidsrisico bij steekproeven, correlatie.
Een zestigtal herhalingsvraagstukken besluit deel 2.
Beide deeltjes maken op mij een degelijke en overzichtelijke indruk. De rekentechniek komt ruimschoots aan bod. Soms is de behandelingswijze te traditioneel. Ik denk aan de wijze waarop de kettingregel wordt ingevoerd. Het verbaasde mij ook, dat de begrippen doorsnede en vereniging van verzamelingen niet expliciet gebruikt worden bij het oplossen van ongelijkheden noch bij stelsels vergelijkingen met twee onbekenden.

L.J.M. v.d. Zijden

Prof. Dr. M. Leppig, (1) *Ein Computer Uebungsmodell*, 79 blz., geb. DM 9,80, 1970, (2) *Lehrbuch zur Computermathematik*, *Sekundarstufe* I, 61 blz., DM 5,40, met 15 bladzijden Lösungen door H. Wilmer, 1971.
Het eerste boekje draagt als ondertitel *'Einführung in die elementaren Rechenmethoden programmgesteuerter Computer; erste Anleitung zum Programmieren'*, het tweede behoort tot een *'Vorkurs Computermathematik'* voor het vijfde tot en met tiende schooljaar van alle soorten onderwijs, beroepsscholen daarbij inbegrepen. Het behandelt vraagstukken die met een eenvoudig Computer-Uebungsmodell kunnen worden gemaakt. Er behoren enige leermiddelen bij de methode: een eenvoudig oefenmodel voor de leerlingen waarop de getallen binair met fiches worden gelegd, prijs DM 2,95, en een klassikaal demonstratiemodel ervan, prijs DM 156,–.
Er komen slechts enkele aspecten van de computerproblematiek aan de orde, aspecten die reeds in het basisonderwijs tot hun recht kunnen komen. Hoofdzaak is het overbrengen van getallen uit het decimale stelsel naar het binaire, het rekenen in het binaire stelsel en het weer overbrengen van de gevonden antwoorden naar het decimale stelsel. Hierbij kan de gecompliceerde technische structuur van de computer geheel op de achtergrond blijven.

Enig rekenwerk te beginnen met de herleiding van sommen en verschillen wordt geprogrammeerd.
Voor alle docenten die belangstelling hebben voor de plaats van de computerkunde in ons onderwijs zijn Leppig's eenvoudige boekjes van waarde.

Joh.H. Wansink

K. de Bruin e.a., *Getal en ruimte*, deel 4-5 H1, *Analyse voor de vierde en vijfde klas havo*, prijs *f* 11,50; deel 4-5 H2, *Meetkunde en statistiek voor de vierde en vijfde klas havo.*

Deze delen kunnen in elke vierde of vijfde havo gebruikt worden door leerlingen, die wiskunde in hun pakket hebben opgenomen. De voortdurende uitgebreide herhaling van begrippen uit de onderbouw maken deze boeken zeer bruikbaar ook als in de eerste jaren een andere methode is gebruikt.
Persoonlijk ben ik van mening, dat de schrijvers bij het samenstellen van deze boeken de juiste middenweg hebben gevonden tussen de twee uitersten: alleen inzicht tegenover ver doorgevoerde training in technieken.
Er is weinig water bij de wijn der exactheid gedaan en toch is er, mede door grote overzichtelijkheid en veel uitgewerkte voorbeelden, een tekst ontstaan die voor een groot gedeelte zelfstandig door de leerlingen bestudeerd kan worden.
Voldoende oefenmateriaal wordt geboden. De twee delen kunnen uitstekend naast elkaar worden gebruikt.

L.J.M. v.d. Zijden

Dr. A. van Dop e.a., *Analyse met goniometrie*, Uitg. Wolters-Noordhoff, prijs *f* 24,25.

Dit boek behandelt de leerstof voor wiskunde I voor de klassen vijf en zes VWO.
Het eerste hoofdstuk bevat een herhaling en uitbreiding van het functiebegrip; bewerkingen met functies en functies met speciale eigenschappen worden op overzichtelijke wijze besproken.
Goniometrische functies worden ingevoerd met behulp van de opwindfunctie. Door de beknoptheid van dit gedeelte lijkt het mij voor weinig leerlingen mogelijk de stof zelfstandig onder de knie te krijgen.
Eenzelfde opmerking geldt voor de behandelingswijze van continuïteit en limieten.
In wiskundig opzicht zijn de hoofdstukken over differentiaal- en integraalrekening degelijk en voor het bedoelde niveau diepgaand werk te noemen. Jammer, dat elke natuurkundige toepassing ontbreekt.
De eigenschappen van natuurlijke logaritmen en van het getal e zijn afgeleid met behulp van de integraal

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

Een hoofdstuk over differentiaalvergelijkingen van de eerste orde besluit het boek.
Bij een goede begeleiding van de wiskundedocent zullen de leerlingen aan dit boekje veel plezier beleven.
Aan het begin van elk hoofdstuk worden zij gemotiveerd door een kort overzichtje dat ook enige geschiedkundige informatie geeft. De grote hoeveelheid oefenmateriaal geeft hen ruimschoots de gelegenheid, de moeilijke theorie onder de knie te krijgen.

L.J.M. v.d. Zijden

*Wiskunde in wording,* Nederlandse bewerking W. den Hartog, Uitg. Malmberg, den Bosch. Aflevering 5 Kromme lijnen; 6 Kaarten en plattegronden; 7 Transformaties; 8 Topologie; 9 Getallen; 10 Relaties; 11 Grafieken; 12 Statistiek.

Op een manier, die kinderen wel zal aanspreken, worden bovengenoemde facetten van de wiskunde, waaronder enige die vroeger op de middelbare school werden verzwegen, in behandeling genomen. Duidelijke gekleurde figuren en leesbare tekst, die echter af en toe ontsierd wordt door te moeilijke woordkeus. Ontlenen aan, impulsen, representatief zijn hiervan drie voorbeelden. De boekjes staan vol met aardige vondsten en de stof diffundeert goed met andere vakken, aardrijkskunde, geschiedenis. Wie alles doorgewerkt heeft weet heel wat van diverse gebieden, die met wiskunde in verband gebracht kunnen worden. Aan de andere kant een lawine van kennis, die over de kinderen komt zonder doel te treffen op die punten, waar de auteur de moeilijkheden voor de lezertjes zeer onderschat. Waarom is topologie niet als sluitstuk genomen? 8 en 12 lijken mij het moeilijkst. Een uitdrukking als 'normale verdeling' is een kreet, die voor een kind weinig inhoud kan hebben. Het onderscheid tussen modus en mediaan wordt niet door voldoende duidelijke voorbeelden ondersteund.
In 5 zijn de figuren op blz. 7 en 8 helaas verwisseld. De kennis van negatieve getallen wordt aanwezig ondersteld. De bizonder aardige beschrijving van de astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

die vergeleken wordt met andere krommen zal door weinigen op juistheid gecontroleerd kunnen worden, eerlijk gezegd was ze mij ook onbekend. Vooral 7 heb ik aardig gevonden. Het is goed, dat kinderen reeds jong symmetrie leren opmerken, dan staan ze als volwassenen niet met 'de mond vol tanden'. In 9 werd ik getroffen door een fraaie uitleg van 'priemgetal', maar ook door het germanisme 'meerdere'. Ook het gebodene over even en oneven is glashelder, maar op pag. 23 heerst een nodeloze verwarring tussen vooruit-achteruit enerzijds en rechts-links anderzijds. Die aflevering 9 had gerust een lager nummer mogen hebben, maar dan zonder het woord 'bewezen', want dat heeft weinig draagwijdte voor de lezertjes, die ik mij in de brugklas voorstel. In aflevering 11 is de lichtgele kleur ietwat onduidelijk, m.i. te licht. Op pag. 10 en 11 zag ik liever gelijke eenheden gebruikt, tot voorbereiding van $y = mx$. Speciaal de hoekvragen op pag. 14 lijken me niet geslaagd.
Als men op de lagere school tijd zou kunnen vinden om een deel van dit alles met goede uitleg door te werken, dan zou het voorbereidend wiskundeonderwijs daarmee zeer zeker gebaat zijn. Wiskunde is het nog niet, zolang er niets bewezen wordt, maar dat is ook niet de bedoeling.
Tot slot een verzuchting: Waarom moeten al deze aardige zaken juist uit het buitenland komen? Zijn er geen landslieden onder ons die eens iets origineels aanbieden? Deze opmerking is echter niet bedoeld voor de prijzenswaardige prestatie die bewerker en uitgever hebben verricht. Het is de moeite waard, het resultaat van hun arbeid aan de praktijk te toetsen en verslag uit te brengen van de didactische ervaringen. De afleveringen 1 Mozaïek, oppervlakte en omtrek; 2 Talstelsels; 3 Veelheden en veelvlakken; 4 Hoeken, die mij na het schrijven van het bovenstaande bereikten geven geen aanleiding tot opmerkingen van andere soort dan de reeds gemaakte. In 1 is op pag. 26 het Chinese *zeven*bord bedoeld; de figuur bevat een lijn te veel. Mijn eindoordeel wordt door de laatste lectuur niet anders: De lof wint het verre van de blaam, die immers vaak op ondergeschikte punten betrekking heeft.

J.K. Timmer

# Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

Ditmaal beginnen we deze rubriek met een boekbespreking.

Ir. K. W. H. Leeflang, *Dominospelen en dominopuzzels,* Kosmos, Amsterdam Antwerpen, 1972, 159 blz.
De eerste 30 bladzijden van het boek zijn besteed aan een historische inleiding en een overzicht van de verschillende spelen die met dominospelen gedaan worden.
Daarna volgt een uitvoerige verhandeling over puzzels die op dominostenen betrekking hebben. Deze vallen uiteen in vier soorten:
1 Het vormen van quadrilles. Dominostenen vormen een quadrille, als ze zo liggen dat vierkanten ontstaan van halve dobbelstenen die alle vier hetzelfde aantal ogen hebben. Zo kan met de stenen 0–0 tot en met 2–2 de volgende quadrille gevormd worden:

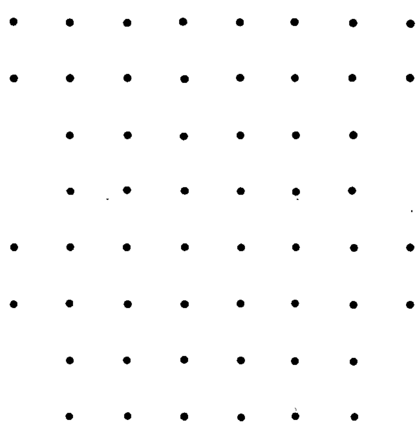
```
0  0—1  1
|
0  0  1  1
   |  |
   2  2
   2—2
```

De schrijver geeft zelfs een systematisch overzicht over alle mogelijke met het hele spel te vormen quadrilles.
2 Het vormen van magische kwadraten met behulp van dominostenen.
3 Het leggen van dominostenen in een vierkant zo, dat aan bepaalde eisen voldaan is.
4 Lineaire rangschikkingen.
Het boek is zeer royaal uitgevoerd en begint met een prachtige plaat van Daumier. Mensen met veel geduld en vrije tijd kan het een plezierige tijdpassering verschaffen. Tot systematisch doorwerken zal men wel niet komen.

P. G. J. Vredenduin

De volgende twee opgaven zijn aan het boek ontleend.

294 Leg een quadrille van de volgende vorm:



(Voor de betekenis van de term quadrille zie bovenstaande boekbespreking.)

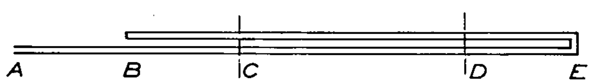
295 Vorm met 25 dominostenen een magisch kwadraat. (Magisch wil hier zeggen, dat de sommen van de ogen op vijf dominostenen in eenzelfde rij, kolom of diagonaal gelijk zijn.)

*Oplossingen*

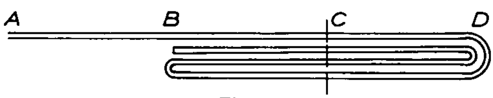
292 Zoek twee getallen van zeven cijfers waarin de cijfers 1 tot en met 7 voorkomen, waarvan de som ook deze eigenschap heeft.
Zoeken is makkelijker dan vinden. Een getal van zeven cijfers waarin de cijfers 1 tot en met 7 voorkomen, laat bij deling door 9 als rest 1. De som van twee dergelijke getallen laat bij deling door 9 dus als som 2 en bestaat dan niet uit de cijfers 1 tot en met 7.

293 Verdeel een strook papier in $n$ congruente delen door de volgende bewerkingen:
1 vouwen loodrecht op de lengterichting,
2 doorknippen loodrecht op de lengterichting,
3 alle verkregen delen op elkaar leggen.
Gevraagd het minimale aantal benodigde bewerkingen in het geval $n = 9$.
Eveneens in het geval $n = 100$.

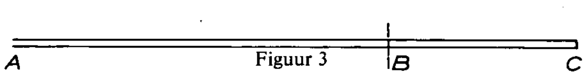
$n = 9$. Er zijn verschillende mogelijkheden. In fig. 1 is de strook 2 maal gevouwen, eerst in $B$ en daarna in $E$. Toen 2 keer doorgeknipt, nl. in $C$ en in $D$. Zorg ervoor, dat $AB = BC = \frac{1}{2}CD = DE$. De 9 verkregen delen zijn dan congruent.
In fig. 2 is de strook 3 maal gevouwen en daarna 1 keer doorgeknipt, nl. in $C$. Zorg ervoor, dat $AB = BC = CD$. Er ontstaan dan weer 9 congruente delen.
In fig. 3 is 1 maal gevouwen en 1 maal geknipt. Er ontstaan nu 3 congruente delen. Leg deze op elkaar. Door de handeling 1 maal vouwen en 1 maal knippen te herhalen krijgen we weer de vereiste 9 delen.
Het aantal uitgevoerde bewerkingen in fig. 1 is 4, in fig. 2 eveneens 4 en in fig. 3 is het 5.




Figuur 1




Figuur 2




Figuur 3

Uit de voorbeelden merkt men, dat het er slechts om gaat de strook in een aantal delen te verdelen. Kan men de strook op een bepaalde manier in b.v. 9 delen verdelen, dan zal men steeds zo kunnen manipuleren, dat op deze manier 9 congruente delen ontstaan. Over het congruent zijn van de delen zullen we ons daarom verder niet bekommeren.
Om de minimale aantallen bewerkingen te vinden, gaan we na in hoeveel delen we de strook verdelen door achtereenvolgens verschillende bewerkingen uit te voeren.
Vouw eerst $v$ keer. Er ontstaan dan $2^v$ lagen. Knip nu $k$ keer. Er ontstaan $k2^v + 1$ delen. Het aantal bewerkingen is $k + v$.
Leg de delen nu op elkaar. Vouw $w$ keer en knip $l$ keer. Er ontstaan dan $(k2^v + 1)(l2^w + 1)$ delen. Het aantal bewerkingen is $k + v + l + w + 1$.
Nu moeten we de aantallen delen bij gegeven aantal bewerkingen gaan maximaliseren. We merken allereerst op, dat voor $k \neq 1$ geldt

$$k2^v + 1 \leqq (k - 1)2^{v+1} + 1.$$

Het meer dan 1 keer doorknippen kunnen we dus zonder bezwaar achterwege laten. Vouw 1 keer meer en knip 1 keer minder; je krijgt daardoor niet minder delen. In het algemeen meer; alleen evenveel als $k = 2$.
Verder is

$$(2^v + 1)(2^w + 1) < 2^{v+w+2} + 1,$$

terwijl het aantal bewerkingen zowel links als rechts gelijk is aan $v + w + 3$. Het op elkaar leggen helpt ons dus alleen maar van de wal in de sloot.
Conclusie. Men verkrijgt optimale resultaten door eerst een aantal keren te vouwen en daarna 1 maal te knippen. Vouwt men $v$ keer, dan krijgt men daardoor $2^v + 1$ delen in $v + 1$ bewerkingen.
Nu $n = 100$. Verleng het stuk in gedachten zo, dat het 129/100 keer zo lang wordt. Kies nu $v = 7$. In 8 bewerkingen heeft men dan het verlangde resultaat verkregen.
Voor $n = 9$ geeft $v = 3$ het beste resultaat. De hierboven gevonden verdelingen door 4 bewerkingen zijn dus de beste.

# Didactische literatuur

*uit buitenlandse tijdschriften*

*The Mathematics Teacher*, LXIV[6]-LXV[7], oktober 1971-november 1972.

E.H. Vruggink e.a., The forum: some pros and cons of performance contracting in mathematics;
J.L. Higgins, A new look at heuristic teaching;
D.J. Finkbeiner e.a., The 1969 advanced placement examinations in mathematics;
D.R. Byrkit, Using televised and aural materials for mathematics teachers;
St.H. Heath, General finite geometries;
E.C. Pack, Should we grade on 'improvement' in mathematics;
D.S. Ailles, Triangles and trigonometry;
Ch.W. Trigg, A digital bracelet for 1971.

E.R. Ranucci, Space-filling in two dimensions;
St.R. Clemens, A non-euclidear distance;
R. Hunkler and H. Heatherley, Is $x.0 = 0$ always true?
N. Grant, Vectors in the eigth grade;
M. Kara Ryan, Probability and the platonic solids;
V.P. Hansen e.a., Films;
K.B. Wilson, Gaining independence in mathematics learning.

C.B. Allendoerffer en anderen, The utility of behavioral objectives;
E.N. Gilbert, The ways to build a box;
J.L. Roger, A factorial curiosity;
W. Wernick, The double straight edge;
D.W. Hansen, The dependence of mathematics on reality;
J.K. Bidwell, A tutoring program for prospective secondary mathematics teachers;
R.S. Luthar, On squares in arithmetic progression;
W.J. Callahan, Adolescent attitudes toward mathematics;
M.T. Bird, Maximum rectangle inscribed in a triangle.

B.M. Oliver, The key of e;
H. Flanders, Analysis of calculus problems;
J.B. Harkin, The limit concept on the geoboard;

Z.P. Usikin and A.F. Coxford, A transformation approach to tenth-grade geometry;
I. Adler, Criteria of success in the seventies;
F.H. Bell, Building a conceptual computer;
Th.W. Shilgalis, A theorem on lines of symmetry;
M.E. Stick, On what day were we born?
J.F. Allison, A picture of the rational numbers; dense but not complete.

H.F. Fehr, The present year-long course in euclidean geometry must go;
F.M. Eccles, Transformations in high school geometry;
B.E. Meserve, An improved year of geometry;
M. Schwarger, Parametric construction of the conics;
H.B. Henning, Geometric solutions of quadratic and conic equations;
J. Matthews, Some novel Mobius strips;
Ch.W. Trigg, Triangular arrangements of numbered disks;
J.K. Bidwell, A physical model for factoring quadratic polynomials;
N. Mann, Modulo systems: one more step;
D. Krabill and Cl. Long, A fortran program for computer plotting of functions of two variables;
W. Ehrenpreis and M. Iannone, Commutativity of linear functions;
A. Ibrahim and E. Gücker, The euclidean algorithm as a matrix transformation;
J.H. Manheim, True theorems from false conjectures;
J.W. Rogers and M.A. Rogers, An algorithm for partial-fraction expansion;
W.C. Smith, A discriminant for the cubic and its use in graphing;
Ph. Locke, Residue designs.

V. O'Keeffe, Mathematical-musical relationships; a bibliography;
Ch. Brumfiel, Number definitions;
M.R. Hutchinson, Investigating the nature of periodic decimals;
E.R. Ranucci, Permutation problems;
H.L. Kung, Another geometric introduction to mathematical generalization.

V.I. White, A profile of individualized instruction;
M. Jerman, The use of computers to individualized instruction;
E.D. MacPherson, How much individualizing?
D.Fh. King, Mathematics and modular scheduling;
W.K. Viertel, Visual aids for relating direct and inverse circular functions;
F. Swetz, The amazing *Chiu Chang Suan Shu.*

D.W. Ballew, The wheel of Aristotle;
J.J. Pedersen, Some whimsical geometry;
Boyd Henry, Moduls 7 arithmetic: a perfect example of field properties;
J.R. Branfield, Teaching mathematics via networks.

D.W. Wells e.a., The forum accountability;
A.A. Hiatt, Problem solving in geometry;
J. Kennedy, The travelling salesman problem;
J.H. Jordan, Constructing the square root;
P.S. Malcom, Mathematics of musical scales;
Th.W. Shilgalis, A transformation proof of the collinearity of the circumcenter, orthocenter and centroid of a triangle;
L. Leake jr., What every mathematics teacher ought to read;
E.L. Ekwards en anderen, Mathematical competencies and skills essential for enlightened citizens.

**Mathematische Projecten „EPSILON"**

*Wiskundig geïnteresseerden,*

*Gaarne richt ik mij tot U met het voorstel, door een geslaagde inteken-reactie te komen tot de uitgave van een boek over de*

# HISTORIE DER WISKUNDE,

*waarbij de gedachte uitgaat naar een verzameling biografieën van de 25 à 30 grootste wiskundigen, elk geschreven door de best beschikbare en daartoe bereid gevonden auteurs, maar waarin, door het beschrijven van hun contacten en inspiratie-bronnen toch de lijn der ontwikkeling duidelijk blijft; een boek wat zeer leesbaar, verhelderend en overvloeiend van voor het onderwijs relevante anecdotes en voorbeelden zal zijn. Het ligt in de bedoeling het werk te verluchtigen met vele illustraties (portretten, diagrammen etc.). Als richtprijs wordt f 18,— aangehouden.*

## Originele winstdeling:

*Om het initiatief der spitsafbijters bij deze nieuwe projectvorm te honoreren, zal van de winst ontstaan door verkoop via de boekhandel etc. 34% uitgekeerd worden aan de intekenaars, 33% aan de verschillende auteurs en 33% aan de initiatiefnemer. Bij een geslaagde ontvangst zal daarna een deel over natuur- en scheikundigen op stapel gezet worden. De intekenaars zullen een exploitatierekening ontvangen.*

---

Naam: ..........................................................................................

Adres: ..........................................................................................

tekent in op de uitgave „Historie der Wiskunde" met inachtname van de bovengenoemde voorwaarden en mits de prijs de *f* 20,— niet zal overschrijden.

---

Eventuele opmerkingen en suggesties over vorm en inhoud zijn welkom.

Brieven onder nummer 016 aan Intermedia bv, postbus 58, GRONINGEN.

# Iedereen is verzekerd tegen ziektekosten. Maar Ambtenaren betalen daar minder voor. Bij de Ambtenaren Centrale althans.



De Ambtenaren Centrale is in feite uw eigen verzekeringsmaatschappij tegen ziektekosten. In 1924 al opgericht voor en door Ambtenaren. AC biedt u: een betere dekking tegen lagere premie. Aanzienlijk lager. Bovendien: de polis wordt toegesneden op uw strikt persoonlijke omstandigheden. En de uitkeringen zijn snel, probleemloos. Alles over AC-verzekeringen leest u in de uitgebreide folder. Die ligt voor u klaar. Hier is uw bon.

**Onderlinge Waarborg Maatschappij tegen gevolgen van Ziekte en Ongeval De Ambtenaren Centrale**

## Coupon

9602

Verklaar u nader en stuur mij fluks de folder over uw unieke ziektekostenpolis.

Mijn naam: ____________________

Adres: ____________________

Plaats: __________ Tel.nr.: __________

Functie: ____________________

Stuur deze coupon in ongefrankeerde envelop aan: de Ambtenaren Centrale, Antwoordnr. 2831 Amsterdam. Of vraag telefonisch aan: 020-62231

Tussenpersoon: N.V. Verzekering-Maatschappij VZVZ, Keizersgracht 369, Amsterdam, tel. 020-62231.

## INHOUD